GỢI Ý GIẢI ĐỀ 08

Câu I.1:

Học sinh tự giải

Câu I.2: Tìm k để đường thẳng $(d): y = kx + 3$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt *M, N* sao cho tam giác *OMN* vuông góc tại gốc tọa độ *O*.

• P/trình hoành độ giao điểm của (d) và (C): $\dfrac{2x+1}{x-1} = kx + 3$ (1)

$\Leftrightarrow 2x + 1 = (x-1)(kx+3), x \neq 1$

$\Leftrightarrow kx^2 + (1-k)x - 4 = 0,\ (x \neq 1)$ (2)

• Đ/kiện để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt là (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa $x \neq 1$.

Đặt $f(x) = kx^2 + (1-k)x - 4$.

Điều kiện trên xảy ra khi $\begin{cases} \Delta = (1-k)^2 - 4k(-4) > 0 \\ k.f(1) \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + 14k + 1 > 0 \\ k\left(k + (1-k) - 4\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} k < -7 - 4\sqrt{3} \\ k > -7 + 4\sqrt{3} \end{array}\right. \\ -3k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k < -7 - 4\sqrt{3} \\ k > -7 + 4\sqrt{3} \end{array}\right. \quad (*)$$

• Khi đó, gọi $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ lần lượt là tạo độ của giao điểm *M, N* của (d) và (C). Ta có $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (2).

Theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{k-1}{k}$; $x_1x_2 = \dfrac{-4}{k}$. (a)

Mặt khác $M, N \in (d): y = kx + 3$ nên ta có :

$y_1 = kx_1 + 3;\ y_2 = kx_2 + 3$.

• Tam giác *OMN* vuông tại *O* nên $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 0$. (b)

Ta có $\overrightarrow{OM} = (x_1; y_1)$, $\overrightarrow{ON} = (x_2; y_2)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1 + 3)(kx_2 + 3)$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = x_1x_2 + k^2x_1x_2 + 3k(x_1 + x_2) + 9$

Thay dữ kiện ở (a) vào ta được: $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = (1+k^2)\left(\dfrac{-4}{k}\right) + 3k.\dfrac{k-1}{k} + 9$

• Theo (b), ta có $(1+k^2)\left(\dfrac{-3k-1}{k}\right) + 3k.\dfrac{k-1}{k} + 9 = 0$

$\Leftrightarrow -k^2 + 6k - 4 = 0$.

Giải p/trình này được hai nghiệm $k = 3 - \sqrt{5}$, $k = 3 + \sqrt{5}$.

• Đối chiếu đ/kiện (*) ta được $k = 3 - \sqrt{5}$, $k = 3 + \sqrt{5}$.

• Vậy có hai giá trị của k thỏa yêu cầu bài toán là $k = 3 - \sqrt{5}$, $k = 3 + \sqrt{5}$.

Câu II.1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} |x-y|+|x+y|+|x^2-y^2|=5 \\ 2(x^2+y^2)=5 \end{cases}$ (1)

Giải:

• Để ý: $2x^2+2y^2=(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xy+y^2)=(x+y)^2+(x-y)^2$

$=(|x+y|)^2+(|x-y|)^2$

• Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} |x-y|+|x+y|+|x+y||x-y|=5 \\ (x+y)^2+(x-y)^2=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-y|+|x+y|+|x+y||x-y|=5 \\ (|x-y|+|x+y|)^2-2|(x+y)(x-y)|=5 \end{cases}$ (2)

Đặt $S=|x-y|+|x+y|$, $P=|(x-y)(x+y)|$, $S\ge 0, P\ge 0$, hệ (2) trở thành

$\begin{cases} S+P=5 \\ S^2-2P=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=5-S \\ S^2-2(5-S)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=5-S \\ S^2+2S-15=0 \end{cases}$

Hệ này có hai nghiệm $\begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases}$ và $\begin{cases} S=-5 \\ P=10 \end{cases}$ (không thỏa mãn $S\ge 0$)

Vậy $S=3; P=2$

• Ta có hệ $\begin{cases} |x+y|+|x-y|=3 \\ |(x+y)(x-y)|=2 \end{cases}$ (3)

Từ hệ (3) ta có $|x+y|$ và $|x-y|$ là hai nghiệm của p/trình $X^2-3X+2=0$.

P/trình này có hai nghiệm $X=1; X=2$

• Từ đó ta có các hệ $\begin{cases} |x+y|=1 \\ |x-y|=2 \end{cases}$ (4); $\begin{cases} |x+y|=2 \\ |x-y|=1 \end{cases}$ (5).

• Từ hệ (4), ta có bốn hệ sau: $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-2 \end{cases}$

Giải bốn hệ này ta được bốn nghiệm

$$\begin{cases} x=3/2 \\ y=-1/2 \end{cases}; \begin{cases} x=1/2 \\ y=-3/2 \end{cases}; \begin{cases} x=-1/2 \\ y=3/2 \end{cases}; \begin{cases} x=-3/2 \\ y=1/2 \end{cases}$$

• Từ hệ (5), ta có bốn hệ sau: $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=-1 \end{cases}$

Giải bốn hệ này ta được bốn nghiệm

$$\begin{cases} x=3/2 \\ y=1/2 \end{cases}; \begin{cases} x=-1/2 \\ y=-3/2 \end{cases}; \begin{cases} x=1/2 \\ y=3/2 \end{cases}; \begin{cases} x=-3/2 \\ y=-1/2 \end{cases}$$

• Tóm lại, hệ đã cho có 8 nghiệm

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu II.2: Cho p/trình $\cos 4x = \cos^2 3x + m.\sin^2 x$ (1)

a) Giải p/trình (1) khi $m = 0$

b) Tìm *m* để p/trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{12}\right)$.

a) Khi $m = 0$, ta có p/trình $\cos 4x = \cos^2 3x$ (2)

$\Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}(1 + \cos 6x)$

Nhận thấy: $4x = 2.2x;\ 6x = 3.2x$ *nên ta dùng công thức góc nhân hai và góc nhân ba để biến đổi p/trình theo* $\cos 2x$.

$\Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 2x - 1\right) = 1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x - 3\cos 2x + 3 = 0$

Đặt $t = \cos 2x$ ta có p/trình $4t^3 - 4t^2 - 3t + 3 = 0$.

Và dùng máy tính để giải được một nghiệm $t = 1$.

Sau đó chia $4t^3 - 4t^2 - 3t + 3$ *cho* $t - 1$ *ta được*

$4t^3 - 4t^2 - 3t + 3 = (t-1)\left(4t^2 - 3\right)$. *Tìm được hai nghiệm còn lại !*

$\Leftrightarrow (t-1)\left(4t^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Với $t = 1$ ta có $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi$
- Với $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ta có $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{6} + l2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + l\pi$
- Với $t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ta có $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{5\pi}{6} + m2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{5\pi}{12} + m\pi$

Kết hợp các nghiệm trên, ta có các nghiệm của p/trình (2) là

$$x = k\pi; x = x = \pm\frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{2},\ (k, n \in \mathbb{Z})$$

Nhận xét: *Khi gặp tr/hợp* $t^2 = \cos^2 2x = \frac{3}{4}$, *để tìm nghiệm gọn ta nên hạ bậc, chứ đừng tách ra hai trường hợp* $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *sẽ có nhiều công thức nghiệm.*

Thật vậy, $\cos^2 2x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}$

Ta giải được 2 công thức nghiệm $4x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.
Và việc hợp nghiệm đã được thực hiện.
P/trình (2) có các nghiệm cho bởi $x = k\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$. *Ok !!!*

b) Tương tự cách giải trên, ta có thể biến đổi $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

• Ta có (1) $\Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}(1+\cos 6x) + m.\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\Leftrightarrow \cos 6x - 2\cos 4x - m.\cos 2x + m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 2x - 3\cos 2x - 2\left(2\cos^2 2x - 1\right) - m\cos 2x + m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x - (m+3)\cos 2x + m + 3 = 0$ (3)

Đặt $t = \cos 2x$, p/trình (3) trở thành $4t^3 - 4t^2 - (m+3)t + m + 3 = 0$ (4)

Nhận xét : Tổng các hệ số của (4) bằng 0 nên (4) có một nghiệm $t = 1$. *Thực hiện phép chia như ở câu a) để tìm nghiệm còn lại !*

$\Leftrightarrow (t-1)\left(4t^2 - m - 3\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ 4t^2 = m+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 = \dfrac{m+3}{4} \end{array}\right. \quad (5)$$

• Với $0 < x < \frac{\pi}{12}$, ta có $t = \cos 2x \in \left(\cos\frac{\pi}{12}; 1\right)$ nên nghiệm $t = 1$ không thỏa mãn.

Ta có $t^2 = \cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$.

Với $0 < x < \frac{\pi}{12}$, ta có $0 < 4x < \frac{\pi}{3}$ nên $\cos 4x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Suy ra $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) < t^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 4x) < \frac{1}{2}(1+1)$ hay $\boxed{\frac{3}{4} < t^2 < 1}$.

• Từ đó suy ra p/trình (1) có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{12}\right)$ khi và chỉ khi p/trình (5) có nghiệm

$t \in \left(\cos\frac{\pi}{12}; 1\right) \Leftrightarrow \frac{3}{4} < t^2 < 1$.

Như vậy, ta có $\frac{3}{4} < t^2 = \frac{m+3}{4} < 1$

$\Leftrightarrow 3 < m + 3 < 4 \Leftrightarrow 0 < m < 1$

• Vậy giá trị của *m* phải tìm thỏa yêu cầu bài toán là $m \in (0;1)$. $y = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{5}$

Câu III: Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

• Đặt $x = \cos t$, $dx = -\sin t dt$

• Với $x=0$, ta có $t=\pi/2$; với $x=\sqrt{2}/2$, ta có $t=\pi/4$

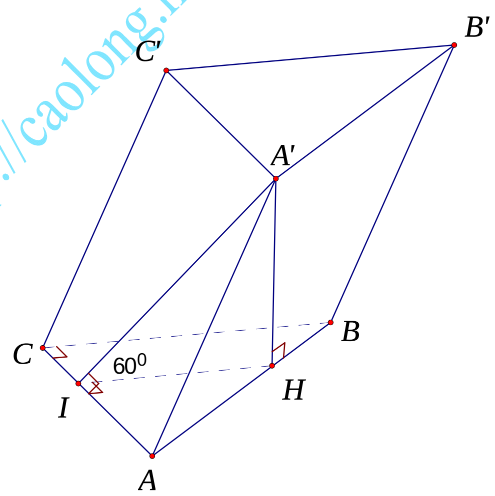
• $I=\int_{\pi/2}^{\pi/4}\sqrt{\dfrac{1+\cos t}{1-\cos t}}(-\sin t)dt=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{\dfrac{1+2\cos^2 t-1}{1-(1-2\sin^2 t)}}\sin t dt$

$I=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}\sin t dt=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left|\dfrac{\cos t}{\sin t}\right|\sin t dt==\int_{\pi/4}^{\pi/2}\dfrac{\cos t}{\sin t}.\sin t dt=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos t dt$

$I=\sin t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Còn nhiều cách giải khác, các em có thể tìm thêm ở các sách tham khảo.

Câu IV: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, có cạnh huyền $AB=\sqrt{2}$. Biết $(ABA')\perp(ABC)$, $AA'=\sqrt{3}$, góc $\widehat{A'AB}$ nhọn, góc hợp bởi hai mặt phẳng $(A'AC)$ và (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích khối lăng trụ.



• Kẻ $A'H\perp AB$ (H thuộc đoạn AB vì góc $\widehat{A'AB}$ nhọn)
Mặt khác hai mặt phẳng $(ABA'),(ABC)$ vuông góc nhau và có giao tuyến là AB.
Suy ra $A'H\perp(ABC)\Rightarrow A'H\perp AC$

• Kẻ $HI\parallel BC$ ($I\in CA$).
Khi đó $HI\perp AC$ (do $BC\perp AC$).
Từ đó suy ra $AC\perp(A'HI)$
$\Rightarrow AC\perp A'I$.

• Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và (ABC) bằng góc $\widehat{A'IH}=60^o$.

• Để tính thể tích lăng trụ ta chỉ cần tính $A'H$.
Đặt $x=AH$, $0<x\le\sqrt{2}$.

Do $AH\parallel BC$ nên ta có $\dfrac{IH}{BC}=\dfrac{AH}{AB}\Leftrightarrow\dfrac{IH}{1}=\dfrac{x}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow IH=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

Trong tam giác vuông $A'HA$, ta có $A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\sqrt{3-x^2}$ (1)

Trong tam giác vuông $A'IH$, ta có $A'H=IH.\tan\left(\widehat{A'IH}\right)=\dfrac{x}{\sqrt{2}}.\tan 60^0=x\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (2)

So sánh (1) và (2) ta suy ra $\sqrt{3-x^2}=x\sqrt{\dfrac{3}{2}}\Leftrightarrow 3-x^2=\dfrac{3}{2}x^2$

Giải ta được $x^2=\dfrac{6}{5}\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{6}{5}}$.

• Suy ra $A'H=x\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{6}{5}.\dfrac{3}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

• Diện tích đáy ABC bằng $S_{ABC}=\frac{1}{2}CA.CB=\frac{1}{2}.1.1=\frac{1}{2}$

• Vậy, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng $V=S_{ABC}.A'H=\frac{1}{2}.\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

> ***Lưu ý:*** *Trong hình vẽ, ta tính được* $AH=\sqrt{\frac{6}{5}}\approx 1,095$ *và* $AB=\sqrt{2}\approx 1,414$ *nên vị trí của H lệch về phía B (vượt quá* $2/3$ *đoạn AB).*
>
> *Cần chú ý để vẽ đúng hình. Nếu góc* $\widehat{A'AB}$ *tù thì điểm H nằm ngoài đoạn AB.*

Câu V: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\left|x^2-4x+3\right|}=m^4-m^2+1 \qquad (1)$$

• Đặt $t=\left|x^2-4x+3\right|,\ (t\geq 0)$ (2)

• P/trình (1) trở thành $\left(\frac{1}{5}\right)^t=m^4-m^2+1$ (3)

Nhận thấy, với giá trị của m làm cho (3) có nghiệm t thì (3) chỉ có một nghiệm duy nhất là $t=\log_{1/5}\left(m^4-m^2+1\right)$. Khi đó số nghiệm của (1) bằng số nghiệm của (2).

• Do vậy (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có bốn nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $y=f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$, ta có $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3 & \text{nếu } x\leq 1 \text{ hoặc } x\geq 3\\ -x^2+4x-3 & \text{nếu } 1<x<3\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}2x-4 & \text{nếu } x\leq 1 \text{ hoặc } x\geq 3\\ -2x+4 & \text{nếu } 1<x<3\end{cases}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in(1;3)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

• Dựa vào bảng biên thiên ta nhận thấy, ph/trình $t=\left|x^2-4x+3\right|$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<t<1$.

Khi đó, ta có $\left(\frac{1}{5}\right)^0>\left(\frac{1}{5}\right)^t>\left(\frac{1}{5}\right)^1\Leftrightarrow 1>\left(\frac{1}{5}\right)^t>\frac{1}{5}$ (do hàm $y=\left(\frac{1}{5}\right)^t$ nghịch biến)

• Đ/kiện để (1) có bốn nghiệm phân biệt là p/trình (3) chỉ có một nghiệm $0<t<1$.

Tức là phải có $1>\left(\frac{1}{5}\right)^t=m^4-m^2+1>\frac{1}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} < m^4 - m^2 + 1 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} < m^4 - m^2 + 1 \\ m^4 - m^2 + 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^4 - 5m^2 + 4 > 0 \\ m^4 - m^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \\ m^2\left(m^2 - 1\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ m \neq 0, -1 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1;0) \cup (0;1)$$

• Vậy các giá trị của *m* phải tìm là $m \in (-1;0) \cup (0;1)$.

Câu VI.a.1
Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): x - 2y + \sqrt{5} - 1 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ cắt nhau tại hai điểm *A, B*. Viết p/trình đ/tròn (C') đi qua ba điểm A, B và $C(0;2)$.

• P/trình của $(C): (x-1)^2 + y^2 = 4 \qquad (*)$

Ta suy ra (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính bằng $R = 2$.

• Từ p/trình của (d), ta có $x = 2y + 1 - \sqrt{5}$ hay $x - 1 = 2y - \sqrt{5}$.

Thay vào p/trình của (C), ta có $\left(2y - \sqrt{5}\right)^2 + y^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 4\sqrt{5}y + 1 = 0$.

Giải p/trình này ta được $y = \dfrac{2\sqrt{5} + \sqrt{15}}{5}$; $y = \dfrac{2\sqrt{5} - \sqrt{15}}{5}$.

Các giá trị tương ứng của *x* là $x = \dfrac{2\sqrt{15} - \sqrt{5}}{5} + 1$; $x = \dfrac{-2\sqrt{15} - \sqrt{5}}{5} + 1$

• Vậy (d) cắt (C) tại hai điểm

$$A\left(\frac{2\sqrt{15} - \sqrt{5}}{5} + 1; \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{15}}{5}\right); \; A\left(\frac{-2\sqrt{15} - \sqrt{5}}{5} + 1; \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{15}}{5}\right).$$

• Nhận xét với $\overrightarrow{IC} = (-1;2)$, vecto chỉ phương của (d) là $\vec{u} = (2;1)$.

Ta có $\overrightarrow{IC}.\vec{u} = -1.2 + 2.1 = 0 \Rightarrow IC \perp (d)$. Suy ra *CI* đi qua trung điểm của *AB* (tính chất của đường thẳng đi qua tâm và vuông góc với dây cung). Do đó *CI* là đường trung trực của đoạn *AB*, suy ra $CA = CB$ nên tam giác CAB cân tại *C*.
Suy ra, tâm I' của đường tròn (C') nằm trên đường thẳng IC.

• Đ/thẳng *IC* đi qua $C(0;2)$ và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{IC} = (-1;2)$ nên có p/trình

$$IC: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

Gọi tọa độ của $I' \in IC$ là $I'(-c; 2 + 2c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Ta có $I'A = I'C \Leftrightarrow I'A^2 = I'C^2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{15} - \sqrt{5}}{5} + 1 + c\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{15}}{5} - 2 - 2c\right)^2 = c^2 + (2 - 2 - 2c)^2$$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5}\right)^2+2\left(\dfrac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5}\right)(1+c)+(1+c)^2$

$+\left(\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{5}\right)^2-4\left(\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{5}\right)(1+c)+4(1+c)^2=c^2+4c^2$

$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{5}(1+c)+5(1+c)^2=5c^2 \Leftrightarrow \left(10-2\sqrt{5}\right)c=2\sqrt{5}-9$

$\Leftrightarrow c=\dfrac{2\sqrt{5}-9}{10-2\sqrt{5}}=\dfrac{-35+\sqrt{5}}{40}$

• Vậy, tọa độ tâm $I'\left(\dfrac{35-\sqrt{5}}{40};\dfrac{5+\sqrt{5}}{20}\right)$.

Bán kính của (C') bằng $R'=I'C=c\sqrt{5}=\dfrac{-35+\sqrt{5}}{40}.\sqrt{5}=\dfrac{1-7\sqrt{5}}{8}$

• P/trình của (C'): $\left(x-\dfrac{-35+\sqrt{5}}{40}\right)^2+\left(y-\dfrac{5+\sqrt{5}}{20}\right)^2=\left(\dfrac{1-7\sqrt{5}}{8}\right)^2$

Nhận xét: *Bài này tôi đã dùng tính chất $IC\perp(d)$, để từ đó chứng tỏ tâm đ/tròn (C') nằm trên IC nên việc gọi tọa độ của I' đã được đơn giản hơn một bước. Nếu chỉ dùng t/chất (C') đi qua A,B,C chắc có lẽ phải tính toán rất cồng kềnh các bạn nhỉ ?*

Câu VI.a.2 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z+5=0$, đường thẳng $(d):\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Viết p/trình tham số của hình chiếu vuông góc của (d) trên mặt phẳng (α).

Các bước giải:

• Xác định tọa độ giao điểm $A=(d)\cap(\alpha)$ (bằng cách giải hệ $(d),(\alpha)$)

• Lấy điểm $M(-3;-1;3)$ thuộc (d) (hoặc chọn điểm khác). Và tìm hình chiếu M' của M trên (α). Cách làm: Viết p/trình đ/thẳng (Δ) qua M và $\Delta\perp(\alpha)$.

Khi đó $M'=\Delta\cap(\alpha)$. (Giải hệ $\Delta,(\alpha)$ để tìm tọa độ của M').

• Hình chiếu vuông góc của (d) trên (α) chính là đường thẳng *AM*.

Câu VII.a: Cho $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Chứng minh rằng $C_n^0.C_n^1.C_n^2...C_n^n\leq\left(\dfrac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1}$

• Xét hkai triển $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$

Thay $x=1$ ta có $(1+1)^n=C_n^0+C_n^1 1+C_n^2 1^2+...+C_n^n 1^n$

$\Leftrightarrow 1+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+1=2^n \boxed{\Leftrightarrow C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}=2^n-2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho $n-1$ số dương $C_n^1,C_n^2,...,C_n^{n-1}$ ta có

$C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}\ge(n-1)\sqrt[n-1]{C_n^1C_n^2...C_n^{n-1}}\Leftrightarrow 2^n-2\ge(n-1)\sqrt[n-1]{C_n^1C_n^2...C_n^{n-1}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2^n-2}{n-1}\ge\sqrt[n-1]{C_n^1C_n^2...C_n^{n-1}}\ \boxed{\Leftrightarrow\left(\dfrac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1}\ge C_n^1C_n^2...C_n^{n-1}}.$

Lại có $C_n^0=C_n^n=1$. Suy ra $\left(\dfrac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1}\ge C_n^0C_n^1C_n^2...C_n^{n-1}C_n^n$ (đpcm)

Câu VI.b.1 Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-2;-1)$ và các cạnh $AB:4x+y+15=0$, $AC:2x+5y+3=0$. Tìm điểm M trên đường cao AH của tam giác ABC sao cho tam giác BMC vuông tại M.

• Tìm tọa độ điểm A (bằng cách giải hệ AB, AC được $A(-4;1)$)

• Đ/thẳng AB đi qua $A(-4;1)$ và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_{AB}}=(1;-4)$ nên có p/trình tham số $(AB):\begin{cases}x=-4+t\\ y=1-4t\end{cases}$.

Đ/thẳng AC đi qua $A(-4;1)$ và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_{AC}}=(5;-2)$ nên có p/trình tham số

$$(AC):\begin{cases}x=-4+5t\\ y=1-2t\end{cases}$$

• Gọi tọa độ của $B\in(AB)$ là $B(-4+b;1-4b)$;
gọi tọa độ của $C\in(AC)$ là $C(-4+5c;1-2c)$.

• Gọi N là trung điểm của BC, ta có tọa độ của N bằng

$$N\left(-4+\frac{b+5c}{2};1-2b-c\right)\qquad(1)$$

• Theo tính chất của trọng tâm tam giác, ta suy ra $\overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{NG}$, suy ra tọa độ của N là

$$N:\begin{cases}x_N=\dfrac{x_A-3x_G}{1-3}=\dfrac{-4-3(-2)}{-2}=-1\\ y_N=\dfrac{y_A-3y_G}{1-3}=\dfrac{1-3(-1)}{-2}=-2\end{cases}\qquad(2)$$

So sánh (1) và (2) ta được

$$\begin{cases}-4+\dfrac{b+5c}{2}=-1\\ 1-2b-c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+5c=6\\ 2b+c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ c=1\end{cases}.$$

• Từ đó ta có $B(-3;-3)$, $C(1;-1)$

• Vecto $\overrightarrow{BC}=(4;2)=2(2;1)$.

Đường cao AH vuông góc với BC nên nhận vecto $\vec{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=(2;1)$ làm vecto pháp tuyến, suy ra $\vec{u}=(1;-2)$ là vecto chỉ phương, đồng thời đi qua điểm $A(-4;1)$ nên có p/trình tham số là $(AH):\begin{cases}x=-4+t\\ y=1-2t\end{cases}$.

• Gọi tọa độ điểm $M \in (AH)$ dạng $M(-4+m;1-2m)$.

Ta có $\overrightarrow{MB} = (1-m;-4+2m)$; $\overrightarrow{MC} = (5-m;-2+2m)$.

Theo giả thiết ta có tam giác *MBC* vuông tại *M* nên $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$.

$\Leftrightarrow (1-m)(5-m)+(-4+2m)(-2+2m) = 0$

$\Leftrightarrow 5m^2 - 18m + 13 = 0 \Leftrightarrow m = 1; m = \dfrac{13}{5}$

• Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là $M(-3;-1)$ và $M\left(-\dfrac{7}{5};-\dfrac{21}{5}\right)$

Câu VI.b.2 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 \\ y = -4+2t \\ 3+t \end{cases}; \ (d_2): \begin{cases} x = -3t' \\ y = 3+2t' \\ z = -2 \end{cases}$$

Viết p/trình đ/thẳng (d) đi qua điểm $M(-1;1;2)$ đồng thời cắt (d_1) và (d_2).

• Giả sử (d) cắt (d_1), (d_2) lần lượt tại A, B.

Gọi tọa độ của *A, B* là $A(1;-4+2a;3+a)$, $B(-3b;3+2b;-2)$.

Suy ra $\overrightarrow{BA} = (3b+1;2a-2b-7;5+a)$; $\overrightarrow{MA} = (2;2a-5;a+1)$

$$\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{MA}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2a-2b-7 & a+5 \\ 2a-5 & a+1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a+5 & 3b+1 \\ a+1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3b+1 & 2a-2b-7 \\ 2 & 2a-5 \end{vmatrix} \right)$$

$$\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{MA}\right] = (-10a-2b-2ab+18; a-3b-3ab+9; -2a-11b+6ab+9)$$

• Đường thẳng (d) đi qua điểm *M* khi và chỉ khi ba điểm *M, A, B* thẳng hàng.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA},\overrightarrow{MA}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{MA}\right] = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10a-2b-2ab+18 = 0 \\ a-3b-3ab+9 = 0 \\ -2a-11b+6ab+9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -32a-17b+63 = 0 \\ -17b+27 = 0 \\ -2a-11b+6ab+9 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giải hai p/trình đầu ta được $a = \dfrac{9}{8}; b = \dfrac{27}{17}$. Thay vào vế trái p/trình thứ ba ta được

$$-2.\frac{9}{8} - 11.\frac{27}{17} + 6.\frac{9}{8}.\frac{27}{17} + 9 = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ (*) có nghiệm $\left\{a = \dfrac{9}{8}; b = \dfrac{27}{17}\right\}$

• Suy ra $A\left(1;-\dfrac{7}{4};\dfrac{33}{8}\right)$, $B\left(-\dfrac{81}{17};\dfrac{105}{17};-2\right)$ và $\overrightarrow{MA} = \left(2;-\dfrac{11}{4};\dfrac{17}{8}\right)$

Suy ra $\vec{u} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{MA} = (16;-22;17)$

• Đ/thẳng (d) đi qua điểm $M(-1;1;2)$ và nhận $\vec{u} = (16;-22;17)$ làm vecto chỉ phương nên có ph/trình tham số là

$$(d):\begin{cases} x=-1+16t \\ y=1-22t \\ z=2+17t \end{cases},\ (t\in\mathbb{R}).$$

Câu VII.b Giải phương trình $8\left(4^x+4^{-x}\right)-54\left(2^x+2^{-x}\right)+101=0$

• Đặt $t=2^x+2^{-x}=2^x+\dfrac{1}{2^x}$.

Theo bất đẳng thức Cô si ta có $2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x.2^{-x}}=2$. Suy ra $t\ge 2$.

Ta có $t^2=\left(2^x+2^{-x}\right)^2=2^{2x}+2^{-2x}+2=4^x+4^{-x}+2$

$\Leftrightarrow 4^x+4^{-x}=t^2-2$

• P/trình đã cho trở thành $8\left(t^2-2\right)-54t+101=0\ \ (t\ge 2)$.

$\Leftrightarrow 8t^2-54t+85=0$

Giải p/trình này được $t=\dfrac{17}{4};t=\dfrac{5}{2}$ (đều thỏa mãn đ/k $t\ge 2$)

• Với $t=\dfrac{17}{4}$, ta có $2^x+\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{17}{4}\Leftrightarrow 4.2^{2x}-17.2^x+4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=4 \\ 2^x=1/4 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$

• Với $t=\dfrac{5}{2}$, ta có $2^x+\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2.2^{2x}-5.2^x+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=2 \\ 2^x=1/2 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

• Kết luận: Ph/trình đã cho có bốn nghiệm $\{-2;-1;1;2\}$.