GỢI Ý GIẢI ĐỀ 06

Câu I.1:

Học sinh tự giải

Câu I.2:

Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình $\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)^3-\sqrt{x(1-x)}=m$ có nghiệm

Nhận xét: $\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)^2=1-x+x+2\sqrt{x(1-x)}=1+2\sqrt{x(1-x)}$

Đ/k xác định: $\begin{cases}x\ge 0\\1-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 1$

Đặt $t=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$, ta có $t^2=1+2\sqrt{x(1-x)}=1+2\sqrt{x(1-x)}$

Suy ra $\sqrt{x(1-x)}=\dfrac{t^2-1}{2}$

Bây giờ ta cần tìm khoảng giá trị của *t*. {*Cách đơn giản và phù hợp với mọi học sinh là dùng đạo hàm và tính biến thiên của hàm số*}

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$ với $x\in[0;1]$, ta có

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\right)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}-\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=\sqrt{x}\Leftrightarrow 1-x=x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\in[0;1]$$

{*Vậy trên mỗi khoảng* $\left(0;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};1\right)$, $f'(x)$ *giữ nguyên một dấu. Để xác định dấu của* $f'(x)$ *trên* $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, *ta chọn* $x=\frac{1}{3}\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$, *có*

$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}>0$. *Suy ra* $f(x)>0$ *với* $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$}

$f(0)=1;\ f(1)=1$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Vậy $1\le f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\le\sqrt{2},\forall x\in[0;1]$. Hay $1\le t\le\sqrt{2}$

• Với cách đặt trên, p/trình $\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)^3-\sqrt{x(1-x)}=m$ có dạng:

$$t^3-\frac{t^2-1}{2}=m\Leftrightarrow 2t^3-t^2+1=2m\Leftrightarrow 2t^3-t^2=2m-1\qquad(*)$$

Cách 1: Dựa vào đồ thị hàm số $y = 2t^3 - t^2$ với $t \in \left[1;\sqrt{2}\right]$ có dạng như đồ thị (C) ở câu I.1 (đã vẽ), suy ra giá trị của *m* để đ/thẳng $y = 2m+1$ có điểm chung với đồ thị.

Suy ra giá trị của *m* phải tìm.

Cách 2:

Xét hàm số $y = g(t) = 2t^3 - t^2$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{2}\right]$, ta có

$g'(t) = 6t^2 - 2t = 2t(3t-1) > 0$ với mọi $t \in \left[1;\sqrt{2}\right]$.

Vậy hàm số $y = g(t)$ đồng biến trên đoạn $\left[1;\sqrt{2}\right]$.

Suy ra $g(1) \le g(t) \le g\left(\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow 1 \le g(t) \le 4\sqrt{2} - 2$, với mọi $t \in \left[1;\sqrt{2}\right]$.

Do đó p/trình (*) có nghiệm khi $1 \le 2m+1 \le 4\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2\sqrt{2} - \frac{3}{2}$.

• *Kết luận*: P/trình đã cho có nghiệm với mọi $m \in \left[0; 2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right]$

Câu II.1:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy = 2 & (1) \\ x^3 + 2xy^2 - 2y = x & (2) \end{cases}$

Giải:

Từ (1) ta có $xy = 2 - x^2$, thế vào (2) ta được: $x^3 + 2y\left(2 - x^2\right) - 2y = x$

$\Leftrightarrow x^3 - x + 2y\left(2 - x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) - 2y\left(1 - x^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = -2y \end{array}\right.$

• Tr/hợp $x = -1$, thay vào (1) ta được $1 - y = 2 \Leftrightarrow y = -1$

Tr/hợp này hệ có nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

• Tr/hợp $x = 1$, thay vào (1) ta được $1 + y = 2 \Leftrightarrow y = 1$

Tr/hợp này hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

• Tr/hợp $x = -2y$, thay vào (1) ta được $4y^2 - 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

Với $y = 1$ ta có $x = -2.1 = -2$; với $y = -1$ ta có $x = -2.(-1) = 2$

Tr/hợp này hệ có hai nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

• Kết luận: Hệ đã cho có 4 nghiệm :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Nhận xét: Còn nhiều cách giải khác, các bạn tự tìm thêm nhé !

Câu II.2:

Tìm *m* để phương trình $2x^2-2mx+1=3\sqrt{4x^3+2x}$ (1) có hai nghiệm thực phân biệt.

Nhận dạng : Để ý $\sqrt{4x^3+2x}=\sqrt{2x\left(2x^2+1\right)}$

Với đ/k $x\ge 0$, p/trình (1) có dạng $mf\left(x\right)+ng\left(x\right)+p\sqrt{f\left(x\right)g\left(x\right)}=0$

• Đ/k xác định: $4x^3+2x\ge 0\Leftrightarrow 2x\left(2x^2+1\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$.

• Khi đó $\Leftrightarrow\left(2x^2+1\right)-m\left(2x\right)-3\sqrt{2x\left(2x^2+1\right)}=0$ (2)

Chia hai vế của (2) cho $2x^2+1>0$, ta được:

$$1-m\frac{2x}{2x^2+1}-3\sqrt{\frac{2x}{2x^2+1}}=0 \qquad (3)$$

• Đặt $t=\sqrt{\frac{2x}{2x^2+1}}$ (ta cần tìm khoảng giá trị của *t*, với $x\ge 0$)

P/trình (3) trở thành $1-m.t^2-3t=0\Leftrightarrow mt^2+3t-1=0$ (4)

Ta có $t=\sqrt{\frac{2x}{2x^2+1}}=\sqrt{\frac{1}{x+\frac{1}{2x}}}\le\sqrt{\frac{1}{2.\sqrt{x.\frac{1}{2x}}}}=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{1}{2x}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}},\left(x\ge 0\right)$.

Và do $x\ge 0$ nên $t=\sqrt{\frac{2x}{2x^2+1}}\ge 0$. Suy ra $0\le t\le\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Với cách đặt $t=\sqrt{\frac{2x}{2x^2+1}}$ (*), ta nhận thấy số nghiệm của (1) bằng số nghiệm của (*). Do đó (1) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (*) có 2 nghiệm phân biệt. Bởi $x\ge 0$ nên ta xét hai tr/hợp sau:

♣ P/trình (*) có nghiệm $x=0$ khi và chỉ khi $t^2=0\Leftrightarrow t=0$.
Thay vào lại (*), ta có p/trình $2x=0\Leftrightarrow x=0$.
Vậy, với $t=0$, P/trình (*) có 1 nghiệm duy nhất $x=0$.
Suy ra đ/k để (*) có hai nghiệm là $t>0$.

♣ Với $t\in\left(0;\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$, ta có $t^2=\frac{2x}{2x^2+1}\Leftrightarrow 2t^2.x^2-2x+t^2=0$ (**)

Vậy (1) có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm dương phân biệt.
Đ/k để (**) có hai nghiệm dương phân biệt là

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2t^4>0\\ t^2/2t^2>0\\ -(-2)/4t^2>0\end{cases}\Leftrightarrow 1-2t^4>0\Leftrightarrow t^4<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<t<\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Từ đó suy ra, (1) có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ (4) có một nghiệm *t* duy nhất thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

• Với $0<t<\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$, ta có (4) $\Leftrightarrow m=\dfrac{1-3t}{t^2}\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{3}{t}$ (5)

{ Ta dùng PP khảo sát hàm vế phải trên $0<t<\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ để tìm *m* để (5) có nghiệm}

Xét hàm số $y=f(t)=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{3}{t}$ với $0<t<\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$, ta có

$$f'(t)=-\frac{2}{t^3}+\frac{3}{t^2}=\frac{1}{t^2}\left(3-\frac{2}{t}\right);\ f'(t)=0\Leftrightarrow 3-\frac{2}{t}=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}\in\left(0;\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right).$$

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(t)$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

x	0		$2/3$		$1/\sqrt[4]{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-9/4$	$\nearrow$	$\sqrt{2}-3\sqrt[4]{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị của *m* để (5) có nghiệm một nghiệm *t* duy nhất với khi $m=-\dfrac{9}{4}$ hoặc $m>\sqrt{2}-3\sqrt[4]{2}$.

• Vậy, (1) có hai nghiệm thực phân biệt với $m=-\dfrac{9}{4}$ hoặc $m>\sqrt{2}-3\sqrt[4]{2}$.

Nhận xét: Nếu các em chia hai vế của (2) cho $2x$ thì lợi hơn rất nhiều !
- Nhận thấy $x=0$ không mãn p/trình (2) với mọi *m*.
- Vậy với $x>0$, chia hai vế của (2) cho $2x$ và làm như trên. Bài giải sẽ gọn hơn . Dễ trình bày hơn.

Câu III:

Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ (C).

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) hàm số trên và tiếp tuyến của nó tại điểm thuộcđồ thị hàm số có hoành độ bằng 2.

♣ Viết p/trình t/tuyến với (C) tại $x=2$:

Với $x=2$, ta có $y=2^3-3.2^2=-4$.

• Đạo hàm: $y'=3x^2-6x$.

Hệ số góc của t/tuyến tại $(2;-4)$: $y'(2)=3.2^2-6.2=0$.

• P/trình t/tuyến với (C) tại $(2;-4)$:

$$y-(-4)=0.(x-2)\text{ hay }y=-4.$$

• P/trình hoành độ giao điểm của t/tuyến trên với (C): $x^3-3x^2=-4$

Giải p/trình này được hai nghiệm $x=-1; x=2$

• Vậy diện tích hình phẳng cần tìm bằng:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|x^3-3x^2+4\right|dx=\left|\int_{-1}^{2}\left(x^3-3x^2+4\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3+4x\right)\Bigg|_{-1}^{2}\right|=\frac{27}{4}$$

Câu IV:

Tính tích phân: $I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}dx}{\left(2e^{2x}+e^x-1\right)^2}$.

• Đặt $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$. Với $x=0$ ta có $t=1$; với $x=\ln 2$ ta có $t=e^{\ln 2}=2$.

• Khi đó $I=\int_0^1\frac{e^x\left(e^x dx\right)}{\left(2e^{2x}+e^x-1\right)^2}=\int_1^2\frac{tdt}{\left(2t^2+t-1\right)^2}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{\left(2t^2+t-1\right)^2}=\frac{t}{\left[(2t-1)(t+1)\right]^2}$.

Giả sử $f(t)=\frac{t}{\left(2t^2+t-1\right)^2}=\frac{a}{(t+1)^2}+\frac{b}{(2t-1)^2}+\frac{c}{t+1}+\frac{d}{2t-1}$, với mọi $t\in[1;2]$.

$$\Leftrightarrow \frac{t}{\left(2t^2+t-1\right)^2}=\frac{(4c+2d)t^3+(4a+b+3d)t^2+(-4a+2b-3c)t+(a+b+c-d)}{\left(2t^2+t-1\right)^2}$$

với mọi $t\in[1;2]$.

Đồng nhất các hệ số tương ứng của các lũy thừa của *t* ở tử thức hai vế ta được hệ

$$\begin{cases}4c+2d=0\\4a+b+3d=0\\-4a+2b-3c=1\\a+b+c-d=0\end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a=-\frac{1}{9}; b=\frac{2}{9}; c=-\frac{1}{27}; d=\frac{2}{27}$.

Suy ra $f(t)=\frac{t}{\left(2t^2+t-1\right)^2}=\frac{-1}{9(t+1)^2}+\frac{2}{9(2t-1)^2}-\frac{1}{27(t+1)}+\frac{2}{27(2t-1)}$

Vậy $I=\int_1^2\left(\frac{-1}{9(t+1)^2}+\frac{2}{9(2t-1)^2}-\frac{1}{27(t+1)}+\frac{2}{27(2t-1)}\right)dt$

$$I=-\frac{1}{9}\int_1^2\frac{d(t+1)}{(t+1)^2}+\frac{1}{9}\int_1^2\frac{d(2t-1)}{(2t-1)^2}-\frac{1}{27}\int_1^2\frac{d(t+1)}{t+1}+\frac{1}{27}\int_1^2\frac{d(2t-1)}{2t-1}$$

$$I = \left.\frac{1}{9(t+1)}\right|_1^2 - \left.\frac{1}{9(2t-1)}\right|_1^2 - \frac{1}{27}\ln(t+1)\Big|_1^2 + \frac{1}{27}\ln(2t-1)\Big|_1^2$$

$$I = \frac{1}{9}.\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{9}.\frac{2}{3} - \frac{1}{27}(\ln 3 - \ln 2) + \frac{1}{27}\ln 3 = \frac{1}{18} + \frac{1}{27}\ln 2$$

Câu V:

Cho *a, b, c* là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\frac{ab}{a^3+b^3}+\frac{bc}{b^3+c^3}+\frac{ca}{c^3+a^3}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Ta có $Q=\frac{1}{\frac{a^3+b^3}{ab}}+\frac{1}{\frac{b^3+c^3}{bc}}+\frac{1}{\frac{c^3+a^3}{ca}}=\frac{1}{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}}+\frac{1}{\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}}+\frac{1}{\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}}$

• Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có

$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b}.\frac{b^2}{a}}=2\sqrt{ab}$. Suy ra $\frac{1}{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}}\le\frac{1}{2\sqrt{ab}}$ (1)

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a^2}{b}=\frac{b^2}{a}\Leftrightarrow a=b$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}\ge 2\sqrt{bc}$. Suy ra $\frac{1}{\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}}\le\frac{1}{2\sqrt{bc}}$ (2)

Dấu "=" xảy ra khi $b=c$

Và có $\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}\ge 2\sqrt{ac}$. Suy ra $\frac{1}{\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}}\le\frac{1}{2\sqrt{ca}}$ (3)

Dấu "=" xảy ra khi $c=a$.

• Cộng (1), (2) và (3) theo vế ta được

$$Q=\frac{1}{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}}+\frac{1}{\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}}+\frac{1}{\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}}\le\frac{1}{2\sqrt{ab}}+\frac{1}{2\sqrt{bc}}+\frac{1}{2\sqrt{ca}}$$

$$Q=\frac{1}{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}}+\frac{1}{\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}}+\frac{1}{\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)\quad(4)$$

• Mặt khác ta có (áp dụng bất đẳng thức Côsi):

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}=\frac{2}{\sqrt{ab}}$ (5). Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}\Leftrightarrow a=b$

Tương tự, ta có $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{\sqrt{bc}}$ (6). Dấu "=" xảy ra khi $b=c$.

Và $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\geq\frac{2}{\sqrt{ca}}$ (7). Dấu "=" xảy ra khi $c=a$.

• Cộng (5), (6) và (7) theo vế ta được

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{2}{\sqrt{ab}}+\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{2}{\sqrt{ca}}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Kết hợp với giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$, ta có $\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\leq 3$ (8)

• So sánh (4) và (8) ta suy ra $Q=\frac{1}{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}}+\frac{1}{\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}}+\frac{1}{\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}}\leq\frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a=b=c\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$.

• Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức Q bằng $\frac{3}{2}$ đạt được khi $a=b=c=1$.

> ***Nhận xét:*** *Còn có nhiều cách làm khác, các em tự nghiên cứu thêm. Trên đây là lời giải chi tiết, cụ thể để các em tham khảo.*
>
> *Chú ý sử dụng các bất đẳng thức* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ *để gộp các hạng tử, khi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.*

Câu VI.a.1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A nằm trên đường thẳng $(d): x-4y-2=0$, cạnh BC song song với (*d*), phương trình đường cao BH: $x+y+3=0$ và trung điểm cạnh AC là $M(1;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

• P/trình tham số của đ/thẳng $(d):\begin{cases}x=2+4t\\ y=t\end{cases},\ (t\in\mathbb{R})$

P/trình tham số của đ/thẳng BH: $\begin{cases}x=-3+t'\\ y=-t'\end{cases},\ (t'\in\mathbb{R})$

• Gọi tọa độ của $A\in(d)$ là $A(2+4a;a)$; tọa độ của $B\in BH$ là $B(-3+b;-b)$.

Biết $M(1;1)$ là trung điểm của AC nên ta có: $\begin{cases}x_A+x_C=2x_M\\ y_A+y_C=2y_M\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=2x_M-x_A\\ y_C=2y_M-y_A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=2.1-(2+4a)=-4a\\ y_C=2.1-a=2-a\end{cases}$. Vậy $C(-4a;2-a)$

• Ta có $\overrightarrow{CB}=(4a+b-3;a-b-2)$; $\overrightarrow{CA}=(2+8a;2+2a)$.

Vecto chỉ phương của (d) và BH lần lượt là $\overrightarrow{u_d}=(4;1)$; $\overrightarrow{u_{BH}}=(1;-1)$

• Theo giả thiết ta có $BC\parallel(d)$ nên ta có $\overrightarrow{CB}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_d}$.

Suy ra $(4a+b-3).1-(a-b-2).4=0\Leftrightarrow 5b+5=0\Leftrightarrow b=-1$

Lại có $AC\perp BH$, suy ra $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{u_{BH}}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{u_{BH}}=0$

$\Leftrightarrow (2+8a).1+(2+2a).(-1)=0 \Leftrightarrow 6a=0 \Leftrightarrow a=0$

- Vậy ta có $B(-4;1)$, $A(2;0)$, $C(0;2)$.

> ***Nhận xét:*** *Khi tính tọa độ các điểm mà đề đã cho điểm đó thuộc một đ/thẳng , chúng ta nên chuyển p/trình đ/thẳng đó về dạng tham số để gọi tọa độ điểm cần tìm theo một ẩn số. Việc làm này rất có lợi vì số ẩn của bài toán sẽ ít đi, khi khai thác ta chỉ cần dùng đến số giả thiết, số tính chất bằng số ẩn mà thôi.*

Câu VI.a.2

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) có phương trình: $x+y+z+3=0$ và các điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$, $C(2;2;2)$.

Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+9\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

> Đầu tiên ta cần biến đổi vecto $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+9\overrightarrow{MC}$ thành một vecto.
>
> *Cách làm*:
>
> Phân tích $\vec{v}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+9\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)=14\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+9\overrightarrow{IC}$
>
> Để phân tích $\vec{v}$ thành một vecto ta tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+9\overrightarrow{IC}=\vec{0}$
>
> Lúc đó $\vec{v}=14\overrightarrow{MI}$

- Xét $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+9\overrightarrow{MC}$, ta có

$\vec{v}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+9\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)=14\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+9\overrightarrow{IC}$

- Xét điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+9\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}+4\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\right)+9\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+9\overrightarrow{OC}-14\overrightarrow{OI}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{14}\left(\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+9\overrightarrow{OC}\right)$

Tọa độ của I bằng $\begin{cases} x_I=\frac{1}{14}(x_A+x_B+x_C)=\frac{1}{14}(3+7+2)=\frac{6}{7} \\ y_I=\frac{1}{14}(y_A+y_B+y_C)=\frac{1}{14}(1+3+2)=\frac{3}{7} \\ z_I=\frac{1}{14}(z_A+z_B+z_C)=\frac{1}{14}(1+9+2)=\frac{6}{7} \end{cases}$. Hay $I\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right)$

- Vậy, với $I\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right)$ ta có $\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+9\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Suy ra $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+9\overrightarrow{MC}=14\overrightarrow{MI}$.

$\Rightarrow \left|\vec{v}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+9\overrightarrow{MC}\right|=14\left|\overrightarrow{MI}\right|=14MI$

- Như vậy $\left|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+9\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P).

Xét đường thẳng (d) qua $I\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right)$ và vuông góc với mặt phẳng (P), khi đó (d) nhận vecto pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$ của (P) làm vecto chỉ phương của (d).

• P/trình tham số của (d): $\begin{cases} x = 6/7 + t \\ y = 3/7 + t \\ z = 6/7 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Điểm M cần tìm thỏa yêu cầu đề là giao điểm của (d) và (P).

Các em tự xác định nhé ! (bằng cách giải hệ hai p/trình của (d) và (P))

Câu VII.a::

Tìm hệ số x^4 trong khai triển đa thức của biểu thức: $P = \left(x^3 - 9x^2 + 23x - 15\right)^{16}$

Cách 1:

Ta viết $P = \left[x^2(x-9) + (23x-15)\right]^{16}$ và xem $a = x^2(x-9); b = 23x - 15$.

Áp dụng khai triển $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^n$, ta có

$$P = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k \left(x^2(x-9)\right)^{16-k} .(23x-15)^k = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k x^{32-2k}(x-9)^{16-k} .(23x-15)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k x^{32-2k}(x-9)^{16-k} .\sum_{i=0}^{k} C_k^i (23x)^{k-i}(-15)^i$$

$$= \sum_{k=0}^{16}\sum_{i=0}^{k} C_{16}^k x^{32-2k}(x-9)^{16-k} C_k^i (23x)^{k-i}(-15)^i$$

$$= \sum_{k=0}^{16}\sum_{i=0}^{k} C_{16}^k C_k^i (-15)^i (23)^{k-i} x^{k-i} x^{32-2k}(x-9)^{16-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{16}\sum_{i=0}^{k} C_{16}^k C_k^i (-15)^i (23)^{k-i} x^{32-k-i} \sum_{m=0}^{16-k} C_{16-k}^m x^{16-k-m}(-9)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{16}\sum_{i=0}^{k}\sum_{m=0}^{16-k} C_{16}^k C_k^i (-15)^i (23)^{k-i} x^{32-k-i} C_{16-k}^m x^{16-k-m}(-9)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{16}\sum_{i=0}^{k}\sum_{m=0}^{16-k} C_{16}^k C_k^i C_{16-k}^m (-15)^i (23)^{k-i}(-9)^m x^{48-2k-i-m}$$

Từ đó ta thấy, các số hạng chứa x^4 là $C_{16}^k C_k^i C_{16-k}^m (-15)^i (23)^{k-i}(-9)^m x^{48-2k-i-m}$ với

$x^{48-2k-i-m} \equiv x^4 \Leftrightarrow 48 - 2k - i - m = 4$

$\Leftrightarrow 2k + i + m = 44$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} m, i, k \in \mathbb{N} \\ 0 \le m \le 16 - k \quad (2) \\ 0 \le i \le k \quad (3) \\ k \le 16 \end{cases}$

Cộng (2) và (3) theo vế ta được $m + i \le 16$ (4)

Từ (1) ta suy ra $44-2k=i+m\le 16 \Leftrightarrow 2k\ge 28 \Leftrightarrow k\ge 14$.
Vậy $14\le k\le 16$ và $k\in\mathbb{N}$ nên ta có các tr/hợp sau:
$\boxed{\bullet\ k=14}$, thay vào (1) ta tính được $m+i=16$, suy ra $i=16-m$, thay vào (3) ta được $16-m\le 14 \Leftrightarrow m\ge 2$.
Mặt khác, từ (2) ta có $m\le 16-k=16-14=2$. Vậy $m=2$, suy ra $i=16-2=14$.

♣ *Tr/hợp này ta có hệ số của số hạng chứa x^4 bằng*

$$C_{16}^kC_k^iC_{16-k}^m(-15)^i(23)^{k-i}(-9)^m=C_{16}^{14}C_{14}^{14}C_{16-14}^{2}(-15)^{14}(23)^{14-14}(-9)^2$$
$$=C_{16}^{14}.15^{14}.9^2=9720.15^{14}$$

$\boxed{\bullet\ k=15}$, ta có $i+m=14$.
Từ (2) ta có $0\le m\le 1$. Mặt khác từ (3) ta có $14-m\le 15 \Leftrightarrow m\ge -1$. Xét hai tr/hợp sau.

*** Với $m=0$, ta có $i=14$ (thỏa $i\le k$)**

♣ *Tr/hợp này ta có hệ số của số hạng chứa x^4 bằng*

$$C_{16}^kC_k^iC_{16-k}^m(-15)^i(23)^{k-i}(-9)^m=C_{16}^{15}C_{15}^{14}C_{16-15}^{0}(-15)^{14}(23)^{15-14}(-9)^0$$
$$=C_{16}^{15}.C_{15}^{14}.C_1^0.15^{14}.23=5220.15^{14}$$

*** Với $m=1$, ta có $i=13$ (thỏa $i\le k$).**

♣ *Tr/hợp này ta có hệ số của số hạng chứa x^4 bằng*

$$C_{16}^kC_k^iC_{16-k}^m(-15)^i(23)^{k-i}(-9)^m=C_{16}^{15}C_{15}^{13}C_{16-15}^{1}(-15)^{13}(23)^{15-13}(-9)^1$$
$$=C_{16}^{15}C_{15}^{13}.C_1^1.(-15)^{13}.(-9).23^2=7998480.15^{13}=533232.15^{14}$$

$\boxed{\bullet\ k=16}$, ta có $i+m=12$.
Từ (2) ta có $0\le m\le 0$, suy ra $m=0$, do đó $i=12$.

♣ *Tr/hợp này ta có hệ số của số hạng chứa x^4 bằng*

$$C_{16}^kC_k^iC_{16-k}^m(-15)^i(23)^{k-i}(-9)^m=C_{16}^{16}C_{16}^{12}C_{16-16}^{0}(-15)^{12}(23)^{16-12}(-9)^0$$
$$=C_{16}^{16}C_{16}^{12}.C_0^0.15^{12}.23^4=1820.15^{12}.23^4$$

Vậy có 4 cặp giá trị của $(k;i;m)$ là $(14;14;2)$, $(15;14;0)$, $(15;13;1)$, $(16;12;0)$.

• Hệ số của các số hạng chứa x^4 trong khai triển biểu thức đã cho bằng

$$9720.15^{14}+5220.15^{14}+533232.15^{14}+1820.15^{12}.23^4$$

Cách 2:

Phân tích $P=\left(x^3-9x^2+23x-15\right)^{16}=\left[(x-1)(x-5)(x-3)\right]^{16}$

$P=(1-x)^{16}(3-x)^{16}(5-x)^{16}$.

Khai triển các nhị thức $(1-x)^{16}$, $(3-x)^{16}$, $(5-x)^{16}$ ta có

$$P=\sum_{k=0}^{16}C_{16}^k(-1)^k.x^k.\sum_{m=0}^{16}C_{16}^m.3^{16-m}.(-1)^m.x^m.\sum_{n=0}^{16}C_{16}^n.5^{16-n}.(-1)^n.x^n$$

Đặt $a_k=C_{16}^k(-1)^k$; $b_m=C_{16}^m.3^{16-m}.(-1)^m$; $c_n=C_{16}^n.5^{16-n}.(-1)^n$

Khi đó $P=\sum_{k=0}^{16}a_k.x^k.\sum_{m=0}^{16}b_mx^m.\sum_{n=0}^{16}c_nx^n$

Hệ số của các số hạng chứa x^4 trong P là:

$a_4.b_0.c_0=C_{16}^4.C_{16}^0.3^{16}.C_{16}^0.5^{15}=3^{15}.5^{15}.C_{16}^4$

$a_3.b_1.c_0 =$
$a_3.b_0.c_1 =$
$a_2.b_2.c_0 =$
$a_2.b_0.c_2 =$
$a_2.b_1.c_1 =$
$a_1.b_3.c_0 =$
$a_1.b_0.c_3 =$
$a_1.b_2.c_1 =$
$a_1.b_1.c_2 =$
$a_0.b_4.c_0 =$
$a_0.b_0.c_4 =$
$a_0.b_3.c_1 =$
$a_0.b_1.c_3 =$
$a_0.b_2.c_2 =$

Hãy tính 15 số hạng trên và cộng lại rồi kết luận nhé !

> Giá trị tính được bằng: 82092690316801757812500 (Quá đã).
> Ở đây Long đã dùng Maple để tính các bạn ạ !

Câu VI.b.1
Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=-5-t\end{cases} \quad \text{và} \quad d_2:\begin{cases}x=0\\ y=4-2t'\\ z=5+3t'\end{cases}$$

Tìm $M\in d_1$, $N\in d_2$ sao cho $MN\perp d_1$, $MN\perp d_2$. Viết phương trình tham số của đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

• Gọi tọa độ của $M\left(1+m;0;-5-m\right)$, $N\left(0;4-2n;5+3n\right)$, $\left(m,n\in\mathbb{R}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(-1-m;4-2n;10+m+3n\right)$

• Vecto chỉ phương của $\left(d_1\right),\left(d_2\right)$ lần lượt bằng $\overrightarrow{u_1}=\left(1;0;-1\right)$, $\overrightarrow{u_2}=\left(0;-2;3\right)$

Theo giả thiết, $MN\perp d_1; MN\perp d_2$ nên ta có $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{u_2}$

Suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(-1-m\right).1+\left(4-2n\right).0+\left(10+m+3n\right)\left(-1\right)=0\\ \left(-1-m\right).0+\left(4-2n\right)\left(-2\right)+\left(10+m+3n\right).3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2m-3n-11=0\\ 3m+13n+22=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-77/17\\ n=-11/17\end{cases}$

Vậy $M\left(-\dfrac{60}{17};0;-\dfrac{8}{17}\right)$, $N\left(0;\dfrac{90}{17};\dfrac{52}{17}\right)$

• Suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{60}{17};\dfrac{90}{17};\dfrac{60}{17}\right)$

Đường thẳng MN là đường vuông góc chung của $\left(d_1\right)$ và $\left(d_2\right)$. MN đi qua điểm

$M\left(-\dfrac{60}{17};0;-\dfrac{8}{17}\right)$ và nhận vecto $\vec{u}=\dfrac{17}{30}\overrightarrow{MN}=\left(2;3;2\right)$ làm vecto chỉ phương.

P/trình tham số của đường thẳng MN là $\begin{cases}x=-60/17+2t\\ y=3t\\ z=-8/17+2t\end{cases}$, $\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Câu VI.b.2
Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình <u>đường thẳng</u> đi qua gốc tọa độ và cắt đường tròn (C): $\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2=25$ thành một dây cung có độ dài bằng 8.

Ở đây tôi sửa lại là "viết phương trình <u>đường thẳng</u>". Bởi vì nếu "viết phương trình <u>đường tròn</u>" thì có vô số đường tròn thỏa mãn đề bài.
Thật vậy, ta thấy độ dài dây cung bằng 8 bé hơn đường kính của (C) (bằng 10) nên có vô số cặp điểm A, B trên (C) sao cho dây AB có độ dài bằng 8. Xét trường hợp A, B, O không thẳng hàng, khi đó mọi đường tròn đi qua ba điểm A, B, O thỏa mãn yêu cầu bài toán. Có vô số đường tròn như thế.

• Giả sử đ/thẳng cần tìm (đi qua gốc tọa độ) có p/trình $\left(d\right): y=kx\ \left(k\in\mathbb{R}\right)$.

• P/trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$$(x-2)^2+(kx+3)^2=25 \Leftrightarrow (k^2+1)x^2+(6k-4)x-12=0 \qquad (1)$$

Vì đ/thẳng (d) đi qua $O(0;0)$ nằm trong (C) nên (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt với mọi k.

Cũng có thể tính $\Delta=(6k+4)^2+12(k^2+1)>0$, *suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt.*

• Gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ là hai giao điểm của (d) và (C). Khi đó $x_1;x_2$ là hai nghiệm của (1) nên theo định lý Viet ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{6k-4}{k^2+1}$; $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{12}{k^2+1}$.

• Do $A,B\in(d): y=kx$ nên ta có $y_1=kx_1$; $y_2=kx_2$.

• Ta có $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(kx_2-kx_1)^2}$

Suy ra $AB^2=(k^2+1)(x_2-x_1)^2=(k^2+1)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]$

$$AB^2=(k^2+1)\left[\left(-\frac{6k-4}{k^2+1}\right)^2-4.\left(-\frac{12}{k^2+1}\right)\right]=\frac{(6k-4)^2}{k^2+1}+48$$

• Theo giả thiết, ta có $AB=8$. Suy ra $\dfrac{(6k-4)^2}{k^2+1}+48=64$, $\left(AB^2=8^2=64\right)$

$$\Leftrightarrow (6k-4)^2-16(k^2+1)=0 \Leftrightarrow 20k^2-48k=0$$

Giải ta được $k=0; k=\dfrac{12}{5}$.

• Trước khi kết luận, ta cần kiểm tra xem đường thẳng song song với trục tung (có hệ số góc không xác định, có p/trình dạng $x=a$) có thỏa đề bài không.
Xét tương giao của trục tung, có p/trình $x=0$, và (C):
Tung độ giao điểm thỏa p/trình $(0-2)^2+(y+3)^2=25$

$$\Leftrightarrow (y+3)^2=21 \Leftrightarrow y+3=\pm\sqrt{21} \Leftrightarrow y=-3\pm\sqrt{21}$$

Ta có hai giao điểm $M\left(0;-3+\sqrt{21}\right)$, $N\left(0;-3-\sqrt{21}\right)$

$$MN=\sqrt{(0-0)^2+\left[-3-\sqrt{21}-\left(-3+\sqrt{21}\right)\right]^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{21}\right)^2}=2\sqrt{21}>8.$$

Tr/hợp này không thỏa yêu cầu bài toán.

• Tóm lại, có hai đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán có p/trình là $y=0$; $y=\dfrac{12}{5}x$.

Câu VII.b

Giải phương trình: $\left(26+15\sqrt{3}\right)^x-\left(8+4\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x-2}=0$. (1)

• Nhận xét $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$; $\left(2+\sqrt{3}\right)^3=26+15\sqrt{3}$.

Suy ra $\left(2-\sqrt{3}\right)^x = \dfrac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x}$ và $\left(26+15\sqrt{3}\right)^x = \left(2+\sqrt{3}\right)^{3x} = \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^x\right]^3$

• Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$, ta có $\left(2-\sqrt{3}\right)^x = \dfrac{1}{t}$ và $\left(26+15\sqrt{3}\right)^x = t^3 \ (t>0)$.

P/trình (1) trở thành $t^3 - \left(8+4\sqrt{3}\right)t + \dfrac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}.\dfrac{1}{t} = 0$

Ở đây ta đã phân tích

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{x-2} = \left(2-\sqrt{3}\right)^x.\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^x}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}.\frac{1}{t}$$

$\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^2 t^4 - \left(8+4\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^2 .t^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(7-4\sqrt{3}\right)t^4 - \left(8-4\sqrt{3}\right)t^2 + 1 = 0$ (2)

Đặt $u=t^2, u>0$, p/trình (2) trở thành $\left(7-4\sqrt{3}\right)u^2 - \left(8-4\sqrt{3}\right)u + 1 = 0$ (3)

Có thể nhận thấy tổng các hệ số của (3): $a+b+c = \left(7-4\sqrt{3}\right) - \left(8-4\sqrt{3}\right) + 1 = 0$ nên

(3) có hai nghiệm $u=1$ và $u = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{7-4\sqrt{3}} = \left(2+\sqrt{3}\right)^2$

Hoặc tính $\Delta = \left(8-4\sqrt{3}\right)^2 - 4\left(7-4\sqrt{3}\right) = 84 - 48\sqrt{3} = \left(6-4\sqrt{3}\right)^2$

Vậy (3) có hai nghiệm $u = \dfrac{8-4\sqrt{3}+\left(6-4\sqrt{3}\right)}{2\left(7-4\sqrt{3}\right)} = 1;$

$$u = \frac{8-4\sqrt{3}-\left(6-4\sqrt{3}\right)}{2\left(7-4\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{7-4\sqrt{3}} = 7+4\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^2$$

• Với $u=1$ ta có $t^2=1 \Leftrightarrow t=1.\ (t>0)$

Ta có $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x=0$

• Với $u=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ ta có $t^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow t = 2+\sqrt{3}$.

Do đó $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow x=1$

• Tóm lại, p/trình (1) có hai nghiệm là $x=0; x=1$.