GỢI Ý GIẢI ĐỀ 05

Câu I.1:
Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ có đồ thị là (C_m).
Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$.

Học sinh tự giải

Câu I.2:
Tìm *m* để (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y = x + 2$

- Tập xác định của hàm số : $D = \mathbb{R}$
- Đạo hàm : $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) = 6\left(x^2 - (2m+1)x + m(m+1)\right)$

Điều kiện để hàm số có cực đại và cực tiểu là tam thức $x^2 - (2m+1)x + m(m+1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Delta = (2m+1)^2 - 4m(m+1) > 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m+1 \\ x = m \end{array}\right.$

> Tr/hợp này, đã có hoành độ các điểm cực đại, cực tiểu ta dễ dàng tính được tung độ các điểm cực đại, cực tiểu bằng cách thế trực tiếp vào p/trình hàm số
>
> Với $x = m+1 \Rightarrow y = 2(m+1)^3 - 3(2m+1)(m+1)^2 + 6m(m+1)^2 + 1 = 2m^3 + 3m^2$
>
> Với $x = m$, ta có $y = 2m^3 - 3(2m+1)m + 6m^2(m+1) + 1 = 2m^3 + 3m^2 + 1$

Ta có tọa độ hai điểm cực trị là

$$A\left(m+1; 2m^3 + 3m^2\right) \text{ và } B\left(m; 2m^3 + 3m^2 + 1\right)$$

Trung điểm hai cực trị có tọa độ $I\left(m + \frac{1}{2}; 2m^3 + 3m^2 + \frac{1}{2}\right)$

- Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;1)$, vecto chỉ phương của $(d): x - y + 2 = 0$ là $\vec{u} = (1;-1)$

$\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 1.1 + 1.(-1) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}$. Suy ra đường thẳng *AB* luôn vuông góc với (d).

- Vậy điều kiện đủ để hai điểm này đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y = x + 2$ là trung điểm *I* của hai điểm cực trị nằm trên (d).

Tức là $2m^3 + 3m^2 + \frac{1}{2} = m + \frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow 2m^3 + 3m^2 - m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)\left(2m^2 + m - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$

- Tóm lại có ba giá trị của *m* thỏa đề bài là $m = 1; m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

> ***Nhận xét:*** *Với bài toán dạng này mà nghiệm của* $y' = 0$ *lẻ thì ta viết ph/trình đường thẳng* (Δ) *đi qua hai điểm cực trị.*

Rồi sử dụng điều kiện cần để hai cực trị đối xứng nhau qua (d) là $(\Delta)\perp(d)$.
Ta có tích hệ số góc của (Δ) và (d) bằng -1. Giải tìm được m.
Sau đó thử lại bằng cách tính tọa độ các điểm cực trị và kiểm tra xem trung điểm của hai cực trị có thuộc (d) hay không rồi kết luận.
Còn có cách khác đó, các em hãy tìm thêm nhé !

Câu II.1:

Giải phương trình $2x^2+4=5\sqrt{x^3+1}$ (1)

Biến đổi ph/trình về dạng $a.f(x)+b.g(x)+c\sqrt{f(x).g(x)}=0$

Cách giải: Xét $g(x)=0$ kiểm tả xem có thỏa mãn p/tr, rồi kết luận

Với $g(x)\neq 0$. Chi hai vế p/trình cho $g(x)$ và đặt $t=\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}\geq 0$.

Ta có p/trình bậc hai $at^2+ct+b=0$, $t\geq 0$.

- Điều kiện xác định: $x^3+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$
- Ta có (1) $\Leftrightarrow 2\left(x^2-x+1\right)+2(x+1)-5\sqrt{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}$ (2)

Vì $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên chia hai vế của (2) cho x^2-x+1 ta được

$\Leftrightarrow 2+2.\dfrac{x+1}{x^2-x+1}-5\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-x+1}}=0$ (3)

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-x+1}},t\geq 0$, p/trình (3) trở thành $2t^2-5t+2=0$

Giải ta được hai nghiệm $t=2;t=\dfrac{1}{2}$

- Với $t=2$ ta có $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-x+1}}=2\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=4$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2-x+1\right)=x+1\Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0$. P/trình này vô nghiệm.

- Với $t=\dfrac{1}{2}$ ta có $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x^2-x+1=4(x+1)\Leftrightarrow x^2-5x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ (thỏa đ/kiện $x\geq -1$)

- Tóm lại p/trình (1) có hai nghiệm $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

Câu II.2:

Giải phương trình $\log_3\left(2^x+1\right).\log_{1/3}\left(2^{x+1}+2\right)+2\log_3^2 2=0$ (1)

- Điều kiện xác định $x\in\mathbb{R}$.
- Ta có (1)$\Leftrightarrow\log_3\left(2^x+1\right).\left[-\log_3\left(2\left(2^x+1\right)\right)\right]+2\log_3^2 2=0$

$\Leftrightarrow -\log_3\left(2^x+1\right)\left[\log_3 2+\log_3\left(2^x+1\right)\right]+2\log_3^2 2=0$ (2)

Đặt $t=\log_3\left(2^x+1\right)$.

Vì $2^x>0\Rightarrow 2^x+1>1\Rightarrow \log_3\left(2^x+1\right)>0$ nên $t>0$

P/trình (2) trở thành $-t\left(\log_3 2+t\right)+2\log_3^2 2=0\Leftrightarrow t^2+\left(\log_3 2\right)t-2\log_3^2 2=0$

Ph/trình này có hai nghiệm $t=\log_3 2>0$ và $t=-2\log_3 2<0$ (loại)

- Vậy ta có $\log_3\left(2^x+1\right)=\log_3 2\Leftrightarrow 2^x+1=2\Leftrightarrow 2^x=1\Leftrightarrow x=0$
- Tóm lại, ph/trình (1) có một nghiệm duy nhất $x=0$.

Câu III:

Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+2\right)^2}{\left(2x-1\right)^7}$

Cách 1:

- Tập xác định của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+2\right)^2}{\left(2x-1\right)^7}$ là : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Giả sử $F\left(x\right)=\dfrac{ax^2+bx+c}{\left(2x-1\right)^6}$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+2\right)^2}{\left(2x-1\right)^7}$.

Khi đó ta có $F'\left(x\right)=f\left(x\right),\forall x\neq\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2ax+b\right)\left(2x-1\right)^6-12\left(2x-1\right)^5\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(2x-1\right)^{12}}=\frac{\left(x+2\right)^2}{\left(2x-1\right)^7},\ \forall x\neq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2ax+b\right)\left(2x-1\right)-12\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(2x-1\right)^7}=\frac{\left(x+2\right)^2}{\left(2x-1\right)^7},\ \forall x\neq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8ax^2-\left(2a+10b\right)x-b-12c}{\left(2x-1\right)^7}=\frac{x^2+4x+4}{\left(2x-1\right)^7},\ \forall x\neq\frac{1}{2}$$

Đồng nhất hệ số của các lũy thừa của x ở thử thức hai vế ta được:

$$\begin{cases}-8a=1\\-\left(2a+10b\right)=4\\-b-12c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{8}\\b=-\frac{3}{8}\\c=-\frac{29}{96}\end{cases}$$

- Vậy nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+2\right)^2}{\left(2x-1\right)^7}$ là $F\left(x\right)=\dfrac{-\left(12x^2+36x+29\right)}{96\left(2x-1\right)^6}+C$

(C là hằng số tùy ý)

Cách 2:

Ta tìm $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)dx=\int\dfrac{\left(x+2\right)^2}{\left(2x-1\right)^7}dx$ bằng PP tích phân từng phần.

• Đặt $u=(x+2)^2$, $dv=\dfrac{dx}{(2x-1)^7}$. Ta có $du=2(x+2)dx$, $v=-\dfrac{1}{12}.\dfrac{1}{(2x-1)^6}$

• Ta có $F(x)=\dfrac{-(x+2)^2}{12(2x-1)^6}-\displaystyle\int\dfrac{-1}{12}.\dfrac{2(x+2)dx}{(2x-1)^6}=\dfrac{-(x+2)^2}{12(2x-1)^6}+\dfrac{1}{6}\displaystyle\int\dfrac{(x+2)dx}{(2x-1)^6}$

Ta có $\displaystyle\int\dfrac{(x+2)dx}{(2x-1)^6}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left(\dfrac{2x-1+5}{(2x-1)^6}\right)dx=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\dfrac{dx}{(2x-1)^5}+\dfrac{5}{2}\displaystyle\int\dfrac{dx}{(2x-1)^6}$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(2x-1)}{(2x-1)^5}+\frac{5}{4}\int\frac{d(2x-1)}{(2x-1)^6}=-\frac{1}{16}.\frac{1}{(2x-1)^4}-\frac{5}{20}.\frac{1}{(2x-1)^5}+C$$

Vậy $F(x)=\dfrac{-(x+2)^2}{12(2x-1)^6}-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{16}.\dfrac{1}{(2x-1)^4}+\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{(2x-1)^5}\right)+C$

$$F(x)=\frac{-(12x^2+36x+29)}{96(2x-1)^6}+C$$

Nhận xét: Có thể tính $\displaystyle\int\dfrac{(x+2)dx}{(2x-1)^6}$ bằng PP tích phân từng phần.

Cách 3: PP phân tích

Ta có $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{(2x-1)^7}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{4(x+2)^2}{(2x-1)^7}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{4x^2+16x+16}{(2x-1)^7}$

$$f(x)=\frac{1}{4}.\frac{(4x^2-4x+1)+(20x-10)+25}{(2x-1)^7}=\frac{1}{4}\frac{(2x-1)^2+10(2x-1)+25}{(2x-1)^7}$$

$$f(x)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2x-1)^5}+\frac{10}{(2x-1)^6}+\frac{25}{(2x-1)^7}\right]$$

Suy ra $F(x)=\displaystyle\int f(x)dx=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\left[\dfrac{1}{(2x-1)^5}+\dfrac{10}{(2x-1)^6}+\dfrac{25}{(2x-1)^7}\right]dx$

$$F(x)=\frac{1}{8}\left[\int\frac{d(2x-1)}{(2x-1)^5}+10\int\frac{d(2x-1)}{(2x-1)^6}+25\int\frac{d(2x-1)}{(2x-1)^7}\right]$$

$$F(x)=\frac{1}{8}\left[-\frac{1}{4}.\frac{1}{(2x-1)^4}-\frac{10}{5}.\frac{1}{(2x-1)^5}-\frac{25}{6}.\frac{1}{(2x-1)^6}\right]+C$$

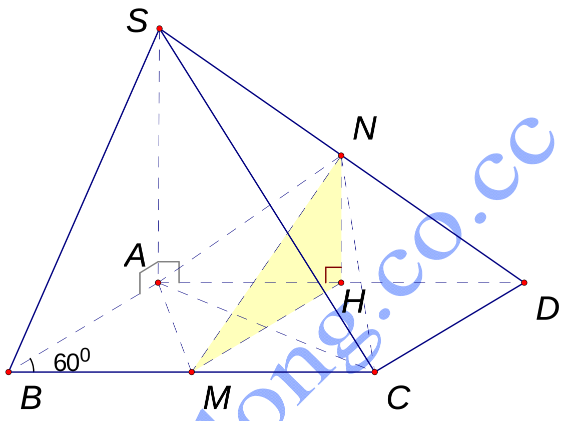
$$F(x)=\frac{-(12x^2+36x+29)}{96(2x-1)^6}+C$$

Câu IV:
Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3a$, đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = a, BC = 2a, \widehat{ABC} = 60^0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và SD. Chứng minh rằng $MN \parallel (SAB)$. Tính thể tích khối tứ diện $MNAC$ theo a.

• Gọi H là trung điểm của AD.
Ta có MH là đường trung bình của tam giác SAD, MN là đường trung bình của hình bình hành $ABCD$.
Suy ra $MH \parallel SA, MH \parallel AB$
$\Rightarrow (MNH) \parallel (SAB) \Rightarrow MN \parallel (SAB)$

• $MH \parallel SA \Rightarrow MH \perp (ABCD)$, suy ra MH là chiều cao của tứ diện $NAMC$.

$$MH = \frac{1}{2}SA = \frac{3a}{2}$$



Diện tích tam giác AMC bằng một nữa diện tích tam giác ABC, bằng

$$S_{AMC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}BA.BC.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{4}.a.2a.\sin 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Vậy thể tích khối tứ diện $MANC$, cũng là khối chóp $N.AMC$, bằng

$$V_{MANC} = \frac{1}{3}S_{AMC}.NH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

Câu V:
Cho $x \geq y > 0$. Chứng minh rằng $5\ln x - 4\ln y \geq \ln(5x - 4y)$. (1)

Ta có $5\ln x - 4\ln y \geq \ln(5x-4y) \Leftrightarrow \ln x^5 - \ln y^4 \geq \ln(5x-4y)$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^5}{y^4}\right) \geq \ln(5x-4y) \Leftrightarrow \frac{x^5}{y^4} \geq 5x - 4y \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^4 \geq 5 - 4\frac{y}{x} \qquad (2)$$

Đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow t \geq 1 (\text{do } x \geq y)$.

Khi đó (2) có dạng $t^4 \geq 5 - \frac{4}{t} \Leftrightarrow t^5 - 5t + 4 \geq 0$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t^5 - 5t + 4, (t \geq 1)$

Ta có $f'(t) = 5t^4 - 5 = 5(t^4 - 1) \geq 0, \forall t \geq 1$. Suy ra hàm số $f(t) = t^5 - 5t + 4$ liên tục và đồng biến trên $[1;+\infty)$. Suy ra $f(t) \geq f(1) = 1 - 5 + 4 = 0$, $\forall t \geq 1$.

Vậy (3) đúng, do đó (1) đúng.

Câu VI.a.1
Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;0)$, $B(3;-1)$ và đường thẳng $(d): x - 2y - 1 = 0$. Tìm điểm $C \in (d)$ sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

• Gọi h là chiều cao của tam giác ABC hạ từ đỉnh C. Theo giả thiết ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.h = 6 \Rightarrow h = \frac{12}{AB}$. Với $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5}$. Suy ra $h = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

• Đường thẳng AB đi qua $A(1;0)$ và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (2;-1)$ nên có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (1;2)$. P/trình tổng quát của đường thẳng AB: $1(x-1) + 2(y-0) = 0$

hay $x + 2y - 1 = 0$.

• Phương trình tham số của đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Gọi tọa độ của $C \in (d)$ là $C(1+2c;c), c \in \mathbb{R}$.

Khoảng cách từ đỉnh C đến đường thẳng AB bằng chiều cao h.

Do đó ta có $\frac{|1+2c+2c-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |4c| = 12 \Leftrightarrow c = \pm 3$

• Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là $C(7;3)$, $C(-5;-3)$.

Câu VI.a.2

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3;1;1)$, $B(1;2;-1)$ và đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Tìm tọa độ hình chiếu A', B' lần lượt của A, B trên (d) và viết phương trình của đường thẳng $A'B'$.

Cách 1:

• P/trình tham số của (d) là: $(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

• Các hình chiếu A', B' lần lượt của A, B trên (d) là thuộc (d). Gọi tạo độ của chúng là $A'(1+2a;2a;a)$, $B'(1+2b;2b;b)$, $(a,b \in \mathbb{R})$

Ta có $\overrightarrow{AA'} = (2a-2;2a-1;a-1)$, $\overrightarrow{BB'} = (2b;2b-2;b+1)$

Theo tính chất của hình chiếu ta có $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}$ vuông góc với vecto chỉ phương $\vec{u}(2;2;1)$ của đường thẳng (d).

Suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{BB'}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2a-2) + 2(2a-1) + 1(a-1) = 0 \\ 2.2b + 2(2b-2) + 1(b+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7/9 \\ b = 1/3 \end{cases}$

Vậy $A'\left(\frac{23}{9};\frac{14}{9};\frac{7}{9}\right)$, $B'\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Vecto $\overrightarrow{A'B'} = \left(-\frac{8}{9};-\frac{8}{9};-\frac{4}{9}\right)$. Đường thẳng $A'B'$ đi qua điểm $B'\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ và có vecto chỉ phương $\vec{v} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{A'B'} = (2;2;1)$ nên có phương trình chính tắc là

$$\frac{x-\frac{5}{3}}{2}=\frac{y-\frac{2}{3}}{2}=\frac{z-\frac{1}{3}}{1}$$

Cách 2:

• Viết p/trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua $A(3;1;1)$ và $(P)\perp AB$.

(P) có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-2;1;-2)$.

P/trình tổng quát của (P): $-2(x-3)+1(y-1)-2(z-1)=0$

hay $(P): 2x-y+2z+7=0$

Hình chiếu A' của A trên (d) chính là giao điểm của (d) và (P). Do đó tọa độ của A' là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=t \\ 2x-y+2z+7=0 \end{cases}$.

Giải hệ được $x=\frac{23}{9}; y=\frac{14}{9}; z=\frac{7}{9}; t=\frac{7}{9}$. Vậy $A'\left(\frac{23}{9};\frac{14}{9};\frac{7}{9}\right)$.

• Tương tự gọi (Q) là mặt phẳng qua $B(1;2;-1)$ và $(Q)\perp AB$.

Viết pttq của (Q) và làm như trên để tính tọa độ B'.

Nhận xét: *Cách 1 có ưu điểm là ngắn gọn, dễ trình bày hơn cách 2*

Câu VII.a::
Có 7 cái hộp và 10 viên bi (mỗi hộp có khả năng chứa nhiều hơn 10 viên bi). Hỏi có tất cả mấy cách đưa 10 viên bi này vào 7 cái hộp đó ?

Để xếp 10 viên bi này vào 7 cái hộp ta tiến hành theo 7 công đoạn.

• Công đoạn 1: Xếp bi vào hộp thứ nhất, có 10 cách xếp (xếp 1 viên, 2 viên, hoặc 3,..., hoặc 10 viên). Các hộp còn lại có thể trống.

• Tương tự với các công đoạn 2, công đoạn 3,..., công đoạn 7 (công đoạn ***i*** là xếp bi vào hộp thứ *i*, $1\le i\le 7$), mỗi công đoạn có 10 cách xếp.

• Vậy theo quy tắc nhân ta có tất cả 10.10.10.10.10.10.10=10.000.000 cách xếp 10 viên bi này vào 7 cái hộp.

(*Hình như có vấn đề (khi chia công đoạn) thì phải*) → Góp ý nhé !

Nhận xét: Có thể lập luận gọn: Mỗi hộp có 10 cách xếp nên số cách xếp 10 viên bi này vào 7 cái hộp bằng $10^7=10.000.000$ cách.

Câu VI.b.1
Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của hyperbol (H), biết rằng tam giác có các cạnh nằm trên hai tiệm cận của (H) và trên đường thẳng vuông góc với trục thực tại đỉnh của (H) là tam giác đều.

• Giả sử ph/trình của (H) có dạng $(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

Khi đó hai đường tiệm cận của (H) có p/trình $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Theo đề bài, tam giác có các cạnh nằm trên hai tiệm cận của (H) và trên đường thẳng vuông góc với trục thực tại đỉnh của (H) là tam giác đều nên góc giữa hai đường tiệm cận $y=\pm\frac{b}{a}x$ bằng 60^0. Hai tiệm cận này đối xứng qua trục hoành nên góc hợp bởi tiệm cận $y=\frac{b}{a}x$ với trục hoành là 30^0 , do đó hệ số góc của tiệm cận này bằng $\tan 30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow a=b\sqrt{3}$. (Tương tự $-\frac{b}{a}=\tan\left(-30^0\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$)

• Vậy p/trình hyperbol cần tìm có dạng $(H):\frac{x^2}{3b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $b\neq 0$.

Câu VI.b.2
Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+2y-z=0$ và hai đường thẳng $(d):\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$, $(d'):\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) vuông góc với (P) đồng thời (Δ) cắt cả (d) và (d').

• Ph/trình tham số của $(d),(d')$ là:

$$(d):\begin{cases}x=-1+2t\\ y=1+2t\\ z=-t\end{cases},\ (d'):\begin{cases}x=1+3t'\\ y=-2-4t'\\ z=1+t'\end{cases},\ \left(t,t'\in\mathbb{R}\right).$$

• Giả sử (Δ) cắt cả (d) và (d') lần lượt tại *A*, *B*. Ta có $A\in(d), B\in(d')$ nên tọa độ của *A*, *B* có dạng $A(-1+2a;1+2a;-a)$, $B(1+3b;-2-4b;1+b)$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3b-2a+2;-4b-2a-3;b+a+1)$.

Vecto pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;2;-1)$.

• Theo giả thiết đường thẳng $AB\equiv(\Delta)\perp(P)$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ cùng phương.

Suy ra $\frac{3b-2a+2}{1}=\frac{-4b-2a-3}{2}=\frac{b+a+1}{-1}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{3b-2a+2}{1}=\frac{-4b-2a-3}{2}\\ \frac{3b-2a+2}{1}=\frac{b+a+1}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10b-2a=-7\\ -4b+a=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Vậy $A(1;3;-1)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ và $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{3}{2};-3;\frac{3}{2}\right)$

Đường thẳng (Δ) đi qua $A(1;3;-1)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$.

P/trình chính tắc của đường thẳng (Δ): $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

Cách 2:

• Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d) và $(\alpha)\perp(P)$. Đ/thẳng (d) qua $M(-1;1;0)$ và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)$. Vecto pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;2;-1)$

Khi đó (α) qua $M(-1;1;0)$ và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;1;2)$

P/tr tổng quát của (α): $0(x+1)+1(y-1)+2(z-0)=0$

hay $(\alpha): y+2z-1=0$.

Đường thẳng (Δ) vuông góc với (P) đồng thời (Δ) cắt (d) sẽ chứa trong (α).

• Gọi (β) là mặt phẳng chứa (d') và $(\beta)\perp(P)$. Đ/thẳng (d') qua $N(1;-2;1)$ và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_{d'}}=(3;-4;1)$.

Khi đó (β) qua $N(1;-2;1)$ và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{u_{d'}},\overrightarrow{n_P}\right]=(2;4;10)$

P/tr tổng quát của (β): $2(x-1)+4(y+2)+10(z-1)=0$

hay $(\beta): x+2y+5z-2=0$

Đường thẳng (Δ) vuông góc với (P) đồng thời (Δ) cắt (d') sẽ chứa trong (β).

• Vậy đường thẳng (Δ) thỏa đề bài là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$.

• Ta cần kiểm tra lại xem (Δ) cắt cả (d) và (d') bằng cách kiểm tra xem vecto chỉ phương của (Δ) có cùng phương với vecto chỉ phương của (d) và (d') hay không ?

• Ta có vecto chỉ phương của (Δ) là $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]=(-2;-4;2)$.

Vì $\frac{2}{-2}\neq\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}$ nên $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{u_\Delta}$ không cùng phương.

Tương tự , do $\frac{3}{-2}\neq\frac{-4}{-4}\neq\frac{1}{2}$ nên $\overrightarrow{u_{d'}}$ và $\overrightarrow{u_\Delta}$ không cùng phương.

Vậy (Δ) cắt cả (d) và (d').

• Chọn điểm $D(x;y;-1)$ thuộc (α) và (β). Ta có $\begin{cases} y+2(-1)-1=0 \\ x+2y+5(-1)-2=0 \end{cases}$

Giải hệ ta được $y=3; x=1$. Suy ra $D(1;3;-1)\in(\alpha)\cap(\beta)$.

Vậy đường thẳng (Δ) đi qua điểm $D(1;3;-1)$ và có vecto chỉ phương

$-\frac{1}{2}\overrightarrow{u_\Delta}=-\frac{1}{2}(-2;-4;2)=(1;2;-1)$ nên có ph/trình chính tắc là

$$(\Delta): \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-1}$$

Nhận xét: *Cách 1 khá gọn và đơn giản. Còn cách 2 đã phức tạp, khó nhớ cách làm (cách mà các STK thường dùng) lại phải kiểm tra xem (Δ) có cắt (d) và (d') không nữa. Như vậy, với các bài toán dạng này, chúng ta nên chọn điểm trên đường thẳng có tọa độ theo tham số để làm cho nhanh, khỏe, gọn.*

Câu VII.b

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\log_2(y+x)-\log_2 x=\log_2(5y-x) & (1) \\ \log_2 x+\log_3 y=0 & (2) \end{cases}$

• Điều kiện: $\begin{cases} x>0, y>0 \\ 5y-x>0 \end{cases}$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \log_2(x+y)^2=\log_2\left[(5y-x).x\right]$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2=(5y-x)x \Leftrightarrow 2x^2-3xy+y^2=0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}+1=0$$

Giải p/trình này ta được $\frac{x}{y}=1; \frac{x}{y}=\frac{1}{2}$

• Với $\frac{x}{y}=1 \Leftrightarrow x=y$, thay ào (2) ta được $\log_2 x+\log_3 x=0$

$$\Leftrightarrow \log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 3}=0 \Leftrightarrow \log_2 x\left(1+\frac{1}{\log_2 3}\right)=0 \Leftrightarrow \log_2 x=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Tr/hợp này ta có nghiệm $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

• Với $\frac{x}{y}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=2x$, thay vào (2) ta được $\log_2 x+\log_3 2x=0$

$$\Leftrightarrow \log_2 x+\frac{\log_2 2x}{\log_2 3}=0 \Leftrightarrow \log_2 3.\log_2 x+1+\log_2 x=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\log_2 3)\log_2 x=-1 \Leftrightarrow \log_2 6.\log_2 x=-1 \Leftrightarrow \log_2 x=-\frac{1}{\log_2 6}=-\log_6 2$$

$\Leftrightarrow \log_2 x=\log_6\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=2^{\log_6\frac{1}{2}}$. Suy ra $y=2x=2.2^{\log_6\frac{1}{2}}=2^{1+\log_6\frac{1}{2}}=2^{\log_6 3}$

Tr/hợp này hệ có nghiệm $\begin{cases} x=2^{\log_6\frac{1}{2}} \\ y=2^{\log_6 3} \end{cases}$.

Tóm lại, hệ đã cho có hai nghiệm, là $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=2^{\log_6\frac{1}{2}} \\ y=2^{\log_6 3} \end{cases}$.

Ôi ! Mệt quá !
Các em cho một lời cảm ơn để động viên nhé !