GỢI Ý GIẢI ĐỀ 04

Câu I.1:

Học sinh tự giải

Câu I.2:

Tìm trên trục tung những điểm *M* mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị $(C): y = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ đồng thời hai tiếp tuyến đó đối xứng nhau qua trục tung và vuông góc với nhau.

Hiện trong SGK GT12 chuẩn (cơ bản) không trình bày *điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị* nên bài giải sau đây tôi trình bày theo cách thông thường (dùng tọa độ tiếp điểm).

♣ ***Điều kiện cần***

• Gọi $M(0;m) \in Oy$ và k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc các đường thẳng qua *M* và tiếp xúc với đồ thị (C).

P/trình các đường thẳng đó là:

$$(d): y = k_1x + m \text{ và } (d'): y = k_2x + m$$

☞ Giả sử (d) và (d') đối xứng nhau qua trục tung và lần lượt tiếp túc với đồ thị (C) tại các điểm có tọa độ $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$.

Khi đó ta có hai hệ

$$\begin{cases} y_1 = k_1x_1 + m \\ y_1 = x_1^4 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2} \\ k_1 = 4x_1^3 - 3x_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y_2 = k_2x_2 + m \\ y_2 = x_2^4 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{1}{2} \\ k_2 = 4x_2^3 - 3x_2 \end{cases}$$

$(x_2;y_2) \in (d')$

$(x_2;y_2) \in (C)$

Hệ số góc của tiếp tuyến tính theo đạo hàm

Bằng cách khử k_1, y_1 và $k_2; y_2$ trong hai hệ trên ta thu được hai phương trình

$$6x_1^4 - 3x_1^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2m - 1 = -3x_1^2(2x_1^2 - 1) \quad (1)$$

$$6x_2^4 - 3x_2^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2m - 1 = -3x_2^2(2x_2^2 - 1) \quad (2)$$

☞ Để ý rằng vì đồ thị (C) nhận *Oy* làm trục đối xứng (*tính chất của hàm số chẵn*) và hai tiếp tuyến $(d), (d')$ đối xứng nhau qua trục *Oy* suy ra hai tiếp điểm $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ cũng đối xứng nhau qua trục *Oy*.

Suy ra $x_1 + x_2 = 0$ và $y_1 = y_2$

☞ Mặt khác hai tiếp tuyến vuông góc nhau nên ta có $k_1.k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow (4x_1^3 - 3x_1)(4x_2^3 - 3x_2) = -1$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2(4x_1^2 - 3)(4x_2^2 - 3) = -1 \Leftrightarrow x_1x_2\left[16(x_1x_2)^2 - 12(x_1^2 + x_2^2) + 9\right] = -1$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2\left[16(x_1x_2)^2 - 12\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] + 9\right] = -1$$

Thay $x_1 + x_2 = 0$ và đặt $t = x_1x_2$ vào ta được:

$$t(16t^2 - 12(-2t) + 9) = -1 \Leftrightarrow 16t^3 + 24t^2 + 9t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Nhân (1) và (2) theo vế ta được

$(2m-1)^2 = 9(x_1x_2)^2(2x_1^2-1)(2x_2^2-1)$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2 = 9(x_1x_2)^2\left[4(x_1x_2)^2 - 2\left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right]+1\right]$

Biểu diễn theo t ta được $(2m-1)^2 = 9t^2(4t^2+4t+1)$.

• Trường hợp $t=-1$, ta có $(2m-1)^2 = 9.1.(4-4+1) = 9$

$\Leftrightarrow 2m-1 = \pm 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Biết $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1$. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $x_1 > 0$ (bởi vì hai điểm $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ đối xứng nhau qua trục Oy nên hai số x_1, x_2 trái dấu).

Với $t=-1$ ta có $x_1.x_2 = -x_1^2 = -1 \Leftrightarrow x_1 = 1$. Suy ra $x_2 = -1$

Hệ số góc các tiếp tuyến $k_1 = 4.1 - 3 = 1$; $k_2 = 4.(-1) - 3(-1) = -1$

Trường hợp này ta tìm được hai cặp đường thẳng

$$(d_1): y = x+2\,;(d_1'): y = -x+2$$

$$\text{Và } (d_2): y = x-1\,;(d_2'): y = -x-1$$

• Trường hợp $t = -\frac{1}{4}$, ta có $(2m-1)^2 = \frac{9}{16}\left(4.\frac{1}{16} - 1 + 1\right) = \frac{9}{64}$

$\Leftrightarrow 2m-1 = \pm\frac{3}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 11/16 \\ m = 5/16 \end{array}\right.$

Với $t = -\frac{1}{4}$ ta có $x_1.x_2 = -x_1^2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}$. Suy ra $x_2 = -\frac{1}{2}$

Hệ số góc các tiếp tuyến $k_1 = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3.\frac{1}{2} = -1$; $k_2 = 4.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

Trường hợp này ta tìm được hai cặp đường thẳng

$$(d_3): y = x + \frac{11}{16}\,;(d_3'): y = -x + \frac{11}{16}$$

$$\text{và } (d_4): y = x + \frac{5}{16}\,;(d_4'): y = -x + \frac{5}{16}$$

♣Thử lại (***Điều kiện đủ***)

Chỉ cần kiểm tra xem các điểm $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ có phải là tiếp điểm hay không.

• Với $t=-1$ ta có hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1^4 - \frac{3}{2}.1^2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = (-1)^4 - \frac{3}{2}.(-1)^2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$

Thay $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ vào p/trình của $(d_1): y = x + 2$, ta được $0 = 1 + 2$ không thỏa mãn.

Thay $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ vào p/trình của $(d_2): y = x - 1$, ta được $0 = 1 - 1$ thỏa mãn.

Vậy cặp đường thẳng $(d_2): y = x - 1; (d_2'): y = -x - 1$.

Suy ra giá trị $m = -1$, tức là điểm $M(0;-1)$ thỏa đề bài.

• Tương tự với $t = -\frac{1}{4}$ ta kiểm tra được cặp đường thẳng

$(d_3): y = x + \frac{11}{16}; (d_3'): y = -x + \frac{11}{16}$ là tiếp tuyến của (C).

Tức là $m = \frac{11}{16}$ hay điểm $M\left(0;\frac{11}{16}\right)$ thỏa đề bài.

• Tóm lại có hai điểm thỏa đề bài là: $M(0;-1)$ hoặc $M\left(0;\frac{11}{16}\right)$.

Kiểm chứng kết quả bằng cách vẽ đồ thị (C) và các tiếp tuyến trên phần mềm Geomester's SketchPad hoặc Cabri II Plus,...

> ***Nhận xét***: Rõ ràng cách làm trên quá dài và phức tạp. Tuy nhiên nếu không được dùng điều kiện nghiệm kép hoặc điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị để giải các bài toán tiếp tuyến thì cách làm trên đây đáp ứng được yêu cầu.
> Vậy, đề thi có ra dạng này trong phần chung hay không ? Nếu có liệu có dùng được điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị (SGK nâng cao) để giải hay không ?
> Hãy cho một đôi lời nhận xét !

Cách 2:

• Gọi $M(0;m)$. Vì hai đường thẳng tiếp tuyến với (C) đi qua M và đối xứng nhau qua trục tung, đồng thời vuông góc với nhau. Suy ra góc hợp bởi hai tiếp tuyến với trục tung là bằng nhau và bằng 45^0. Do đó, góc hợp bởi hai tiếp tuyến trên với trục hoành (theo chiều dương) lần lượt bằng 45^0 và 135^0. Suy ra hệ số góc của hai tiếp tuyến lần lượt bằng $\tan 45^0 = 1$ và $\tan 135^0 = -1$.

• Vậy ph/trình hai tiếp tuyến nói trên có dạng $y = x + m$ và $y = -x + m$

Giả sử tiếp tuyến $y = x + m$ tiếp xúc với (C) tại $(x_0; y_0)$.

Ta có hệ số góc tiếp tuyến bằng $y'(x_0) = 4x_0^3 - 3x_0 = 1$.

Giải ta được $x_0 = 1; x_0 = -\frac{1}{2}$.

• Với $x_0 = 1$ ta có $y_0 = x_0^4 - \frac{3}{2}x_0^2 + \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

Suy ra $m = y_0 - x_0 = 0 - 1 = -1$

• Với $x_0 = -\frac{1}{2}$ ta có $y_0 = x_0^4 - \frac{3}{2}x_0^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{16} - \frac{3}{2}.\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$.

Suy ra $m = y_0 - x_0 = \frac{3}{16} + \frac{1}{2} = \frac{11}{16}$.

Vậy có hai điểm thỏa ycbt là $M(0;-1)$ hoặc $M\left(0;\frac{11}{16}\right)$.

Cách 3: Dùng đ/kiện tiếp xúc của hai đường (Xem SGK GT12, nâng cao), tham khảo cách giải này ở cách STK trên thị trường.

Câu II.1:

Giải bất phương trình $\frac{1}{1-2x} \geq \frac{2}{1+\sqrt{3x+1}}$ (1)

Đ/k xác định: $\begin{cases} 1-2x \neq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$.

Nhận xét : Với đ/k nếu trên thì vế phải luôn dương , do đó đ/k để (1) có nghiệm là $1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

Vậy $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1+\sqrt{3x+1} \geq 2(1-2x) \end{cases}$

{Với $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$ thì hai vế của (1) đều dương, cụ thể là hai mẫu thức. Do đó ta quy đồng và bỏ mẫu được}

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{3x+1} \geq 1-4x\ (2) \end{cases}$

Xét bất phương trình (2):

• Tr/hợp $1-4x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$ thì (2) luôn nghiệm đúng.

Suy ra (2) nghiệm đúng với mọi $x \in \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$

• Tr/hợp $1-4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{4}$, ta có

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ (3x+1) \geq (1-4x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 16x^2 - 11x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0 \leq x \leq \frac{11}{16} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$

• Kết hợp hai trường hợp trên ta có tập nghiệm của (1) là:

$$T = \left[0;\frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) = \left[0;\frac{1}{2}\right)$$

Câu II.2:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3 - x^3 = y - x^2\ (1) \\ x^2 + y^2 = x - y\ (2) \end{cases}$

Ta có $\Leftrightarrow (y-x)\left(y^2+x^2+xy\right)-y-x^2$ (3)

Thay $x^2+y^2=x-y$ vào (3) ta được $(y-x)(x-y+xy)=y-x^2$

$\Leftrightarrow 2xy-y^2+y^2x-x^2y-y=0$

$\Leftrightarrow (xy-y)+\left(xy-x^2y\right)+\left(y^2x-y^2\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)y-xy(x-1)+y^2(x-1)=0$

$$\Leftrightarrow y(x-1)(1-x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ x=1 \\ 1-x+y=0 \end{array}\right.$$

- Tr/hợp $y=0$, thay vào (2) ta được $x^2=x \Leftrightarrow x=0; x=1$

Tr/hợp này hệ có hai nghiệm $(0;0),(1;0)$

- Tr/hợp $x=1$, thay vào (2) được $y^2=-y \Leftrightarrow y=0; y=-1$

Tr/hợp này hệ có hai nghiệm $(1;0),(1;-1)$

- Tr/hợp $1-x+y=0 \Leftrightarrow x=y+1$, thay vào (2) được $(y+1)^2+y^2=1$

$\Leftrightarrow 2y^2+2y=0 \Leftrightarrow y=0; y=-1$

Tr/hợp này hệ có hai nghiệm $(1;0),(0;-1)$.

- Tóm lại, hệ đã cho có bốn nghiệm $(0;0),(1;0),(1;-1),(0;-1)$.

Câu III:

Tính tích phân $I=\int_0^1 x\ln\left(1+x^2\right)dx$

Đặt $u=1+x^2 \Rightarrow du=2xdx$

Với $x=0$ ta có $u=1$; với $x=1$ ta có $u=2$.

Khi đó $I=\int_1^2 \frac{1}{2}\ln u.du=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln u.du=\frac{1}{2}\left(u\ln u\Big|_1^2-\int_1^2 ud(\ln u)\right)$

{*Giải bằng PP tích phân từng phần, với* $dv=du$ }

$$I=\frac{1}{2}\left[2\ln 2-\int_1^2 u.\frac{du}{u}\right]=\frac{1}{2}\left(2\ln 2-\int_1^2 du\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\ln 2-u\Big|_1^2\right)=\frac{1}{2}\left[2\ln 2-(2-1)\right]=\ln 2-\frac{1}{2}$$

Câu IV:

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình bình hành. Biết $AB=a$, $AA'=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D',A'B'$. Biết $A'C\perp(BDMN)$.

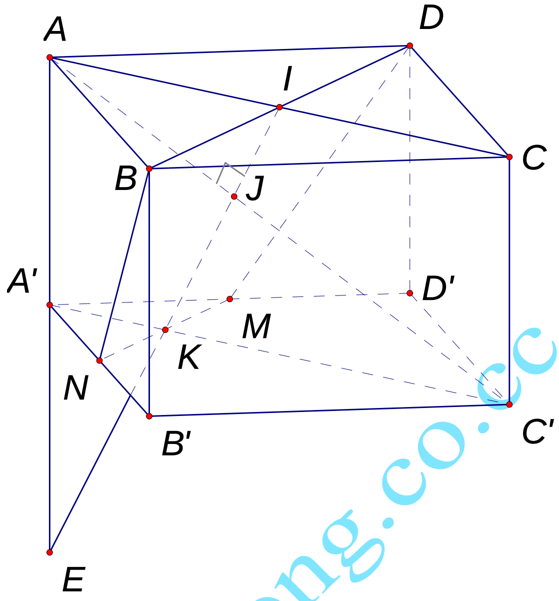
Hãy tính thể tích khối đa diện $A'MN.ABD$

Gọi K là giao điểm của MN và $A'C'$.

Ta có $A'C\perp(BDMN)\Rightarrow A'C\perp BD$. Mặt khác $BD\perp AA'$.

Suy ra $BD\perp(A'AC)\Rightarrow BD\perp AC$.

Hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc nhau nên nó là hình thoi.
Kéo dài IK cắt AA' tại E.
(I là giáo điểm của AC, BD).
Vì $MN \parallel BD, AB \parallel A'N, AD \parallel A'M$ nên hai tam giác $A'MN, ABD$ đồng dạng



Suy ra $\dfrac{A'K}{AI} = \dfrac{A'N}{AN} = \dfrac{1}{2}$

Lại có hai tam giác $EA'K, EAI$ đồng dạng,

suy ra $\dfrac{EA'}{EA} = \dfrac{A'K}{AI} = \dfrac{1}{2}$. Vậy E là trung điểm của EA, suy ra $EA = 2A'A = 2a$

Ta có $A'C \perp IE$ (Vì $IE \subset (BDMN)$)

Suy ra hai tam giác vuông ACC', EAI đồng dạng (vì có hai góc bằng nhau là $\widehat{CAC'} = \widehat{AEI}$, góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Suy ra $\dfrac{AI}{CC'} = \dfrac{EA}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{AI}{CC'} = \dfrac{2CC'}{2AI} \Rightarrow AI = CC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow BI = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2} \Rightarrow BD = 2BI = 2.\frac{a}{2} = a$$

• Thể tích khối chóp $E.ABD$ bằng $V_{E.ABD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABD}.EA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.BD.AI.EA$

$$V_{E.ABD} = \frac{1}{6}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$$

• Thể tích khối chóp $E.AMN$ bằng $V_{E.AMN} = \dfrac{1}{3}.S_{A'MN}.EA' = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.MN.AK.EA'$

$$V_{E.ABD} = \frac{1}{6}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{32}$$

• Vậy thể tích khối đa diện $A'MN.ABD$ bằng

$$V_{A'MN.ABD} = V_{E.ABD} - V_{E.A'MN} = \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{32} = \frac{7a^3}{32}$$

Nhận xét: Mấu chốt của bài toán là ở chỗ khai thác giả thiết $A'C \perp (BDMN)$ để chứng minh đáy của khối hộp là hình thoi. Rồi thấy được tính đồng dạng của hai tam giác vuông ACC', EAI để tính được AI!
Theo tôi thấy, đây là bài toán khó với nhiều học sinh.
Hi vọng qua cách giải trên, các em học sinh có thêm kỹ năng để nhìn và khai thác các bài toán khác tương tự.

Câu V:

Chứng minh rằng với mọi $x, y \in (0;1), x \neq y$ ta có $\dfrac{1}{y-x}\left(\ln\dfrac{y}{1-y} - \ln\dfrac{x}{1-x}\right) > 4$

Xét hàm số $y = f(x) = \ln\frac{x}{1-x}$ trên khoảng $(0;1)$. Hàm số này liên tục và có đạo hàm $y' = \frac{1}{x(1-x)} > 0, \forall x \in (0;1)$.

• Giả sử $y > x$. Khi đó hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[x;y] \subset (0;1)$ và có đạo hàm trên đoạn đó. Theo định lý La-Grăng (trang 10/SGK-GT 12, cơ bản) tồn tại $c \in (x;y)$ sao cho $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) = \frac{1}{c(1-c)}$ (1)

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có $c(1-c) \le \left(\frac{c+1-c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Suy ra $\frac{1}{c(1-c)} \ge 4$. (2)

Dấu "=" xảy ra khi $c = 1-c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \in (0;1)$.

Vì $[x;y] \subset (0;1)$ nên trong tr/hợp tổng quát có thể $c = \frac{1}{2} \notin (x;y)$.

Do đó $\frac{1}{c(1-c)} > 4$ (3)

• Kết hợp (1) và (3) suy ra $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ge 4 \Leftrightarrow \frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{1-y} - \ln\frac{x}{1-x}\right) > 4$

Câu VI.a.1
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác *ABC*. Biết phương trình đường thẳng chứa cạnh *AB* là $y = 2x$, phương trình đường thẳng chứa cạnh *AC* là $y = 0,25x + 2,25$ và tọa độ trọng tâm tam giác *ABC* là $G\left(\frac{8}{3};\frac{7}{3}\right)$. Tính diện tích tam giác *ABC* ?

• Tọa độ của *A* là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = 2x \\ y = 0,25x + 2,25 \end{cases}$

Giải hệ ta được $x = \frac{9}{7}; y = \frac{18}{7}$. Suy ra $A\left(\frac{9}{7};\frac{18}{7}\right)$.

• Phương trình tham số của đường thẳng *AB* là $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

Phương trình tham số của đường thẳng *AC* là $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 3 + t \end{cases}$

• Gọi tọa độ của $B(b;2b)$ và $C(3+4c;3+c)$, $(b,c \in \mathbb{R})$.

• $G\left(\frac{8}{3};\frac{7}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác *ABC* nên ta có $\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases}$

Do đó ta có $\begin{cases} \dfrac{9}{7}+b+3+4c=3.\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{18}{7}+2b+3+c=3.\dfrac{8}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+4c={}^{26}\!/_{7} \\ 2b+c={}^{10}\!/_{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b={}^{2}\!/_{7} \\ c={}^{6}\!/_{7} \end{cases}$

Vậy $B\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4}{7}\right)$, $C\left(\dfrac{45}{7};\dfrac{27}{7}\right)$.

Suy ra $BC=\sqrt{\left(\dfrac{45}{7}-\dfrac{2}{7}\right)^2+\left(\dfrac{27}{7}-\dfrac{4}{7}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2378}{49}}=\dfrac{\sqrt{2378}}{7}$

• Đường thẳng *BC* đi qua $B\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4}{7}\right)$ và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{43}{7};\dfrac{23}{7}\right)$ nên có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(23;-43)$.

Ph/trình tổng quát của đường thẳng *BC* : $23\left(x-\dfrac{2}{7}\right)-43\left(y-\dfrac{4}{7}\right)=0$

Hay $23x-48y+18=0$.

Khoảng cách từ $A\left(\dfrac{9}{7};\dfrac{18}{7}\right)$ đến đường thẳng *BC* bằng

$$h=d_{[A,(BC)]}=\frac{\left|23.\dfrac{9}{7}-43.\dfrac{18}{7}+18\right|}{\sqrt{23^2+43^2}}=\frac{|-63|}{\sqrt{2378}}$$

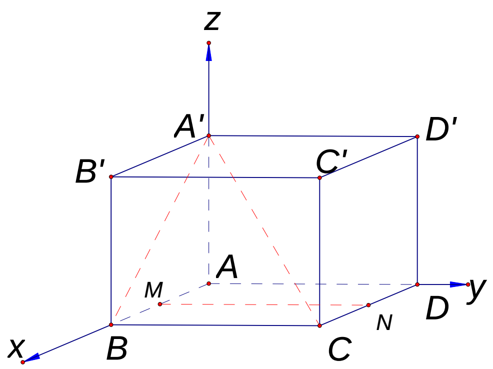
H chính bằng chiều cao của tam giác *ABC*.

Vậy diện tích tam giác *ABC* bằng $S=\dfrac{1}{2}BC.h=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2378}}{7}.\dfrac{63}{\sqrt{2378}}=\dfrac{9}{2}$ (đvdt).

Câu VI.a.2

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN.

Vẽ hình lập phương trong hệ trục $Oxyz$ theo giả thiết đề bài, ta có $C(1;1;0)$, $M\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$ $N\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$.



Vì $MN\,//\,BC$ nên $MN\,\|\,(A'BC)$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C$ và MN bằng khoảng cách giữa đường thẳng *MN* và mặt phẳng $(A'BC)$ bằng khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng $(A'BC)$.

• Mặt phẳng $(A'BC)$ đi qua $B(1;0;0)$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC}\right]=(1;0;1)$.

P/trình mặt phẳng $(A'BC)$: $1(x-1)+0(y-0)+1(z-0)=0$ hay $x+z-1=0$.

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

$$h=\frac{\left|1.\frac{1}{2}+1.0-1\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN bằng $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

> Ngoài cách trên, chúng ta có thể gọi H là hình chiếu của M trên $A'B$ sau đó chứng minh $MH\perp(A'BC)$. Suy ra MH là khoảng cách từ M đến $(A'BC)$
>
> Có thể thấy $MH=\frac{1}{4}AB'=\frac{1}{4}.\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. (*Rất đơn giản*)

Câu VII.a

Tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển biểu thức $\left(\frac{1}{x}-x^2+x^3\right)^n$. Biết n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_{n-4}^{n-6}+nA_n^2=454$.

Điều kiện của n: $\begin{cases}n-4\geq 1\\ n\geq 2\end{cases}\Leftrightarrow n\geq 5$

Ta có $C_{n-4}^{n-6}+nA_n^2=454\Leftrightarrow\frac{(n-4)!}{(n-6)!2!}+n\frac{n!}{(n-2)!}=454$

$$\Leftrightarrow\frac{(n-4)(n-5)}{2}+n.n(n-1)=454\Leftrightarrow 2n^3-2n^2+\left(n^2-9n+20\right)-2.454=0$$

$\Leftrightarrow 2n^3-n^2-9n-888=0\Leftrightarrow n=8$ (thỏa đ/kiện)

- Lúc đó $f(x)=\left(\frac{1}{x}-x^2+x^3\right)^n=\left(\frac{1}{x}+x^2(x-1)\right)^8$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\left(\frac{1}{x}\right)^{8-k}\left[x^2(x-1)\right]^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^k x^{k-8}x^{2k}(x-1)^k$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{8}C_8^k x^{3k-8}\sum_{i=0}^{k}C_k^i x^{k-i}(-1)^i=\sum_{k=0}^{8}\sum_{i=0}^{k}C_8^kC_k^i x^{4k-8-i}(-1)^i,\ (k,i\in\mathbb{N},i\leq k).$$

Cho số mũ của lũy thừa x^{4k-i-4} bằng 2 ta có $4k-i-8=2$

Phương trình này có nghiệm $\begin{cases}k=m\\ i=4m-10\end{cases}$ với $m\in\mathbb{Z}$.

Vì $0\leq i\leq k$ nên $0\leq 4m-10\leq m\Leftrightarrow\frac{5}{2}\leq m\leq\frac{10}{3}$. Suy ra $m=3$.

Ta có $k=3; i=2$. Vậy hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển biểu thức đã cho bằng

$$C_8^3.C_3^2(-1)^2=168$$