GỢI Ý GIẢI ĐỀ 04

Câu I.1:

Học sinh tự giải

Câu I.2:
Tìm trên trục tung những điểm *M* mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị $(C): y = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ đồng thời hai tiếp tuyến đó đối xứng nhau qua trục tung và vuông góc với nhau.

Hiện trong SGK GT12 chuẩn (cơ bản) không trình bày *<u>điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị</u>* nên bài giải sau đây tôi trình bày theo cách thông thường (dùng tọa độ tiếp điểm).

♣ ***Điều kiện cần***

• Gọi $M(0;m) \in Oy$ và k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc các đường thẳng qua *M* và tiếp xúc với đồ thị (C).

P/trình các đường thẳng đó là:

$$(d): y = k_1x + m \text{ và } (d'): y = k_2x + m$$

☞ Giả sử (d) và (d') đối xứng nhau qua trục tung và lần lượt tiếp túc với đồ thị (C) tại các điểm có tọa độ $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$.

Khi đó ta có hai hệ

$(x_2;y_2) \in (d')$

$(x_2;y_2) \in (C)$

$$\begin{cases} y_1 = k_1x_1 + m \\ y_1 = x_1^4 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2} \\ k_1 = 4x_1^3 - 3x_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y_2 = k_2x_2 + m \\ y_2 = x_2^4 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{1}{2} \\ k_2 = 4x_2^3 - 3x_2 \end{cases}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tính theo đạo hàm

Bằng cách khử k_1, y_1 và $k_2; y_2$ trong hai hệ trên ta thu được hai phương trình

$$6x_1^4 - 3x_1^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2m - 1 = -3x_1^2(2x_1^2 - 1) \quad (1)$$

$$6x_2^4 - 3x_2^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2m - 1 = -3x_2^2(2x_2^2 - 1) \quad (2)$$

☞ Để ý rằng vì đồ thị (C) nhận *Oy* làm trục đối xứng (*tính chất của hàm số chẵn*) và hai tiếp tuyến $(d),(d')$ đối xứng nhau qua trục *Oy* suy ra hai tiếp điểm $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ cũng đối xứng nhau qua trục *Oy*.

Suy ra $x_1 + x_2 = 0$ và $y_1 = y_2$

☞ Mặt khác hai tiếp tuyến vuông góc nhau nên ta có $k_1.k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow (4x_1^3 - 3x_1)(4x_2^3 - 3x_2) = -1$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2(4x_1^2 - 3)(4x_2^2 - 3) = -1 \Leftrightarrow x_1x_2\left[16(x_1x_2)^2 - 12(x_1^2 + x_2^2) + 9\right] = -1$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2\left[16(x_1x_2)^2 - 12\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] + 9\right] = -1$$

Thay $x_1 + x_2 = 0$ và đặt $t = x_1x_2$ vào ta được:

$$t(16t^2 - 12(-2t) + 9) = -1 \Leftrightarrow 16t^3 + 24t^2 + 9t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Nhân (1) và (2) theo vế ta được

$(2m-1)^2 = 9(x_1x_2)^2(2x_1^2-1)(2x_2^2-1)$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2 = 9(x_1x_2)^2\left[4(x_1x_2)^2 - 2\left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right]+1\right]$

Biểu diễn theo t ta được $(2m-1)^2 = 9t^2(4t^2+4t+1)$.

• Trường hợp $t=-1$, ta có $(2m-1)^2 = 9.1.(4-4+1) = 9$

$\Leftrightarrow 2m-1 = \pm 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Biết $x_1+x_2=0 \Leftrightarrow x_2=-x_1$. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $x_1>0$ (bởi vì hai điểm $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ đối xứng nhau qua trục Oy nên hai số x_1, x_2 trái dấu).

Với $t=-1$ ta có $x_1.x_2 = -x_1^2 = -1 \Leftrightarrow x_1 = 1$. Suy ra $x_2=-1$

Hệ số góc các tiếp tuyến $k_1 = 4.1-3=1$; $k_2 = 4.(-1)-3(-1) = -1$

Trường hợp này ta tìm được hai cặp đường thẳng

$$(d_1): y = x+2\,;(d_1'): y=-x+2$$

$$\text{Và } (d_2): y = x-1\,;(d_2'): y = -x-1$$

• Trường hợp $t=-\frac{1}{4}$, ta có $(2m-1)^2 = \frac{9}{16}\left(4.\frac{1}{16}-1+1\right) = \frac{9}{64}$

$\Leftrightarrow 2m-1 = \pm\frac{3}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 11/16 \\ m = 5/16 \end{array}\right.$

Với $t=-\frac{1}{4}$ ta có $x_1.x_2 = -x_1^2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}$. Suy ra $x_2 = -\frac{1}{2}$

Hệ số góc các tiếp tuyến $k_1 = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3.\frac{1}{2} = -1$; $k_2 = 4.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

Trường hợp này ta tìm được hai cặp đường thẳng

$$(d_3): y = x+\frac{11}{16}\,;(d_3'): y = -x+\frac{11}{16}$$

$$\text{và } (d_4): y = x+\frac{5}{16}\,;(d_4'): y = -x+\frac{5}{16}$$

♣Thử lại (***Điều kiện đủ***)

Chỉ cần kiểm tra xem các điểm $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ có phải là tiếp điểm hay không.

• Với $t=-1$ ta có hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1^4 - \frac{3}{2}.1^2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = (-1)^4 - \frac{3}{2}.(-1)^2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$

Thay $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ vào p/trình của $(d_1): y = x + 2$, ta được $0 = 1 + 2$ không thỏa mãn.

Thay $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ vào p/trình của $(d_2): y = x - 1$, ta được $0 = 1 - 1$ thỏa mãn.

Vậy cặp đường thẳng $(d_2): y = x - 1; (d_2'): y = -x - 1$.

Suy ra giá trị $m = -1$, tức là điểm $M(0;-1)$ thỏa đề bài.

• Tương tự với $t = -\frac{1}{4}$ ta kiểm tra được cặp đường thẳng

$(d_3): y = x + \frac{11}{16}; (d_3'): y = -x + \frac{11}{16}$ là tiếp tuyến của (C).

Tức là $m = \frac{11}{16}$ hay điểm $M\left(0;\frac{11}{16}\right)$ thỏa đề bài.

• Tóm lại có hai điểm thỏa đề bài là: $M(0;-1)$ hoặc $M\left(0;\frac{11}{16}\right)$.

Kiểm chứng kết quả bằng cách vẽ đồ thị (C) và các tiếp tuyến trên phần mềm Geomester's SketchPad hoặc Cabri II Plus,...

Nhận xét: Rõ ràng cách làm trên quá dài và phức tạp. Tuy nhiên nếu không được dùng điều kiện nghiệm kép hoặc điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị để giải các bài toán tiếp tuyến thì cách làm trên đây đáp ứng được yêu cầu.
Vậy, đề thi có ra dạng này trong phần chung hay không ? Nếu có liệu có dùng được điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị (SGK nâng cao) để giải hay không ?
Hãy cho một đôi lời nhận xét !

Câu II.1:

Câu II.2:

Câu III:

Câu IV:

Câu V:

Câu VI.a.1

Câu VI.a.2

Câu VII.a::

Câu VI.b.1

Câu VI.b.2

Câu VII.b