GỢI Ý GIẢI ĐỀ 03

Câu I.1:

Học sinh tự giải

Câu I.2:

Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$ đường thẳng $(d): y = mx - 3m$ luôn cắt đồ thị (C) hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt và có ít nhất một điểm có hoành độ lớn hơn 2.

• Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ và đường thẳng $(d): y = mx - 3m\,(m \neq 0)$ là: $\dfrac{x-2}{x-1} = mx - 3m$ (1)

$\Leftrightarrow x - 2 = (x-1)(mx-3m), x \neq 1$

$\Leftrightarrow mx^2 - (4m+1)x + 3m + 2 = 0,\ x \neq 1$ (2)

♥1

• P/trình (2) là p/trình bậc hai (vì $m \neq 0$) có $\Delta = (4m+1)^2 - 4m(3m+2)$

$\Delta = 4m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên (2) luôn có hai nghiệm phân biệt

Mặt khác thay $x = 1$ vào vế trái của (2) ta có:

$m.1 - (4m+1).1 + 3m + 2 = 0.m + 1 \neq 0, \forall m \in \mathbb{R}$, nên $x = 1$ không phải là nghiệm của (2) với mọi *m*.

♥2

• Xem $f(x) = mx^2 - (4m+1)x + 3m + 2$ là tam thức bậc hai theo *x* (vì $m \neq 0$), ta có:

$m.f(2) = m\left[m.4 - (4m+1).2 + 3m + 2\right] = m.(-m) = -m^2 < 0, \forall m \neq 0$

Theo định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai suy ra $f(x)$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2$.

• Tóm lại, p/trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2$ với mọi $m \neq 0$, hay p/trình (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm lớn hơn 2. Vậy đường thẳng (*d*) luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 với mọi $m \neq 0$.

♣ ***Nhận xét***: Đoạn ♥1 không cần đề cập (không trình bày) vẫn được nếu đã trình bày đoạn ♥2 *(theo t/chất của định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai)*

Câu II.1:

Giải phương trình $\dfrac{1}{4} + \cos^2\dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{2}.\sin^2\dfrac{x}{2}$ (1)

Dùng công thức hạ bậc $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha); \sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \cos 2.\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3} = -\frac{1}{4}\cos x \Leftrightarrow 2 + 2\cos 2\frac{x}{3} + \cos 3\frac{x}{3} = 0$$

Đỗ Cao Long-http://caolong.co.cc

{Dùng công thức góc nhân hai và góc nhân ba với $\cos$:
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Áp dụng với $\alpha = \dfrac{x}{2}$ ta có
$\cos\dfrac{2x}{3} = \cos 2\dfrac{x}{3} = 2\cos^2\dfrac{x}{3} - 1;\ \cos x = \cos 3\dfrac{x}{3} = 4\cos^3\dfrac{x}{3} - 3\cos\dfrac{x}{3}$ }

$$\Leftrightarrow 2 + 2\left(2\cos^2\frac{x}{3} - 1\right) + 4\cos^3\frac{x}{3} - 3\cos\frac{x}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3\frac{x}{3} + 4\cos^2\frac{x}{3} - 3\cos\frac{x}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{3}\left(4\cos^2\frac{x}{3} - 4\cos\frac{x}{3} - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{x}{3} = 0 \\ 4\cos^2\dfrac{x}{3} - 4\cos\dfrac{x}{3} - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos\dfrac{x}{3} = \dfrac{3}{2} > 1(\text{loại}); \cos\dfrac{x}{3} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{2} + 3k\pi \\ \dfrac{x}{3} = \pm\dfrac{\pi}{3} + l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{2} + k3\pi \\ x = \pm\pi + l6\pi \end{array}\right., \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

♣ Kết luận:

Câu II.2:

Giải phương trình $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \dfrac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = 3\log_8(4x)$ (1)

• Điều kiện để p/trình có nghĩa:

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ (x-1)^8 > 0 \\ 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x - 1 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

• Với đ/kiện nêu trên ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_{2^{1/2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_{2^2}(x-1)^8 = 3\log_{2^3}(4x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2\log_2(x+3) + \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.8\log_2|x-1| = 3.\frac{1}{3}\log_2(4x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+3) + \log_2|x-1| = \log_2(4x) \qquad (2)$$

{ Bây giờ chúng ta sẽ khử dấu giá trị tuyệt đối $|x-1|$ với điều kiện $x > 0, x \neq 1$.
Vậy ta phải xét trên hai khoảng $0 < x < 1$ và $x > 1$.
- Với $x \in (0;1)$ ta có $x - 1 < 0$ nên $|x-1| = -(x-1) = 1 - x$
- Với $x \in (1;+\infty)$ ta có $x - 1 > 0$ nên $|x-1| = x - 1$ }

Đỗ Cao Long-http://caolong.co.cc

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1 \\ \log_2(x+3)+\log_2(1-x)=\log_2(4x) \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ \log_2(x+3)+\log_2(x-1)=\log_2(4x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1 \\ (x+3)(1-x)=4x \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ (x+3)(x-1)=4x \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1 \\ -x^2-6x+3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1 \\ x=-3\pm 2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ x=-1; x=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1 \\ -x^2-6x+3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3+2\sqrt{3} \\ x=3 \end{array}\right.$$

• Tóm lại, phương trình (1) có hai nghiệm $x=-3+2\sqrt{3}; x=3$

♣ ***Nhận xét***: Có thể trình bày lời giải p/trình (2) bằng cách xét hai trường hợp riêng:

* Tr/hợp $x\in(0;1)$ ta có $x-1<0$ nên $|x-1|=-(x-1)=1-x$

Do đó (2) $\Leftrightarrow \log_2(x+3)+\log_2(1-x)=\log_2(4x)$

$\Leftrightarrow \log_2\left[(x+3)(1-x)\right]=\log_2(4x)$

$$\Leftrightarrow (x+3)(1-x)=4x \Leftrightarrow -x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3+2\sqrt{3} \\ x=-3-2\sqrt{3}\,(\text{loại}) \end{array}\right.$$

Trường hợp này (2) có một nghiệm $x=-3+2\sqrt{3}$

* Tr/hợp $x\in(1;+\infty)$ ta có $x-1>0$ nên $|x-1|=x-1$.

Do đó đó (2) $\Leftrightarrow \log_2(x+3)+\log_2(x-1)=\log_2(4x)$

$\Leftrightarrow \log_2\left[(x+3)(x-1)\right]=\log_2(4x)$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1)=4x \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1\,(\text{loại}) \end{array}\right.$$

Trường hợp này (2) có một nghiệm $x=3$

• Tóm lại, (1) có hai nghiệm $x=-3+2\sqrt{3}; x=3$.

♦ ***Một số lưu ý***: Đừng để mắc sai lầm khi biến đổi $\log_2(x-1)^8=8\log_2(x-1)$.

Sai lầm thứ hai là cho rằng $(x-1)^8>0, \forall x$.

Tổng quát: $\log_a(u)^{2k}=2k\log_a|u|$ với **điều kiện** $u\neq 0$.

Câu III:

Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$

Đỗ Cao Long-http://caolong.co.cc

Để ý rằng $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ và nếu đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

♦ Ta có $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$

• Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ hay $\sin x dx = -dt$

Với $x = \pi/6$ ta có $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; với $x = \dfrac{\pi}{4}$ ta có $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• Khi đó $I = \displaystyle\int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{-dt}{t^2\sqrt{1+t^2}} = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}}$

{ Đến đây, biểu thức tích phân có chứa $\sqrt{1+t^2}$ nên ta đổi biến bằng cách đặt $t = \tan u$, $dt = \left(1+\tan^2 u\right)du$ }

• Đặt $t = \tan u \Rightarrow dt = \left(1+\tan^2 u\right)du$

Với $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u = a = \arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow u = b = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

• Khi đó $I = \displaystyle\int_a^b \frac{1+\tan^2 u}{\tan^2 u\sqrt{1+\tan^2 u}} du = \int_a^b \frac{\sqrt{1+\tan^2 u}}{\tan^2 u} du = \int_a^b \frac{\cos u}{\sin^2 u} du$

$I = \displaystyle\int_a^b \frac{d\left(\sin u\right)}{\sin^2 u} = -\frac{1}{\sin u}\Bigg|_a^b$ (Quá khó tính)

Đến đây có thể dùng máy tính cầm tay để cho ra kết quả !

{ Có thể tính $\sin a$ như sau

$$\sin^2 a = 1-\cos^2 a = 1-\frac{1}{1+\tan^2 a} = 1-\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tương tự $\sin^2 b = 1-\dfrac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1-\dfrac{4}{7} = \dfrac{3}{7} \Rightarrow \sin b = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$

$$\Rightarrow I = -\left(\frac{1}{\sin b}-\frac{1}{\sin a}\right) = -\left(\sqrt{\frac{7}{3}}-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Cách 2:

Biến đổi $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{\cos^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)}} dx$

Đỗ Cao Long-http://caolong.co.cc

Trên khoảng $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$ ta có $\cos x > 0$ nên $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = \cos x$

Do đó

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan^2 x+1}}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x}}.\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x}}d(\tan x)$$

{ Chú ý rằng $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\tan x)$ }

• Đặt $u = \sqrt{2+\tan^2 x} \Rightarrow u^2 = 2+\tan^2 x \Rightarrow 2udu = 2\tan x d(\tan x)$

$\Rightarrow \tan x d(\tan x) = udu$

Với $x = \frac{\pi}{6}$ ta có $u = \sqrt{2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$; $x = \frac{\pi}{4}$ ta có $u = \sqrt{2+(1)^2} = \sqrt{3}$

• Khi đó $I = \int_{\sqrt{7/3}}^{\sqrt{3}} \frac{udu}{u} = \int_{\sqrt{7/3}}^{\sqrt{3}} du = u\Big|_{\sqrt{7/3}}^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{\frac{7}{3}}$

♣ ***Nhận xét***: Cần chú ý mối quan hệ giữa $\tan x$, $d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}dx = (1+\tan^2 x)dx$ để biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân theo $\tan x$.

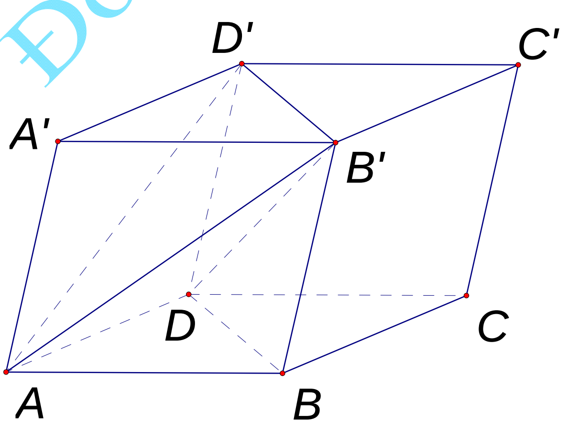
Chẳng hạn: $\frac{dx}{\cos x(\sin x+\cos x)} = \frac{dx}{\cos^2 x(\tan x+1)} = \frac{d(\tan x)}{\tan x+1}$

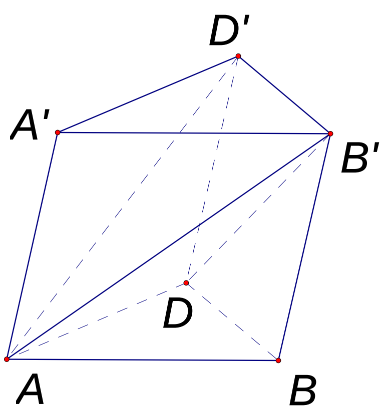
$$\frac{dx}{1+\sin 2x+\cos 2x} = \frac{dx}{\sin 2x+2\cos^2 x} = \frac{dx}{2\cos x(\sin x+\cos x)} = \frac{2d(\tan x)}{\tan x+1}$$

Tương tự $\frac{dx}{\sin x(\sin x+\cos x)} = \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cot x)} = \frac{-d(\cot x)}{1+\cot x}$

♦ Các em có thể tìm thêm một số biểu thức khác nữa nhé !

Câu IV:
Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a. Biết rằng $AA'B'D'$ là khối tứ diện đều cạnh bằng a ($a > 0$).





Đỗ Cao Long-http://caolong.co.cc

• Đầu tiên ta chứng minh rằng, thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng (gấp) 6 lần thể thích khối tứ diện $AA'B'D'$. (Chúng ta đã học một t/chất: Có thể chia một khối hộp thành 6 khối tứ diện có thể tích bằng nhau)

• Dễ thấy hai khối lăng trụ tam giác $ABD.A'B'D'$ và $CBD.C'B'D'$ có đáy bằng nhau và cùng chiều cao nên có thể tích bằng nhau.

Xét riêng khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$. Chia khối lăng trụ này thành 3 khối tứ diện $AA'B'D'$, $ABB'D$, $ADD'B'$.

+ Hai khối tứ diện $ABB'D$, $ADD'B'$ có hai đáy BDB', $D'DB'$ có diện tích bằng nhau và có cùng chiều cao là khoảng cách từ đỉnh *A* đến mp($BDD'B'$). Suy ra hai khối tứ diện này có thể tích bằng nhau. (1)

+ Hai khối tứ diện $AA'B'D'$ và $ADD'B'$ có hai đáy $A'B'D'$, ABD có diện tích bằng nhau và có cùng chiều cao bằng chiều cao của lăng trụ $ABD.A'B'D'$. Suy ra Suy ra hai khối tứ diện này có thể tích bằng nhau. (2)

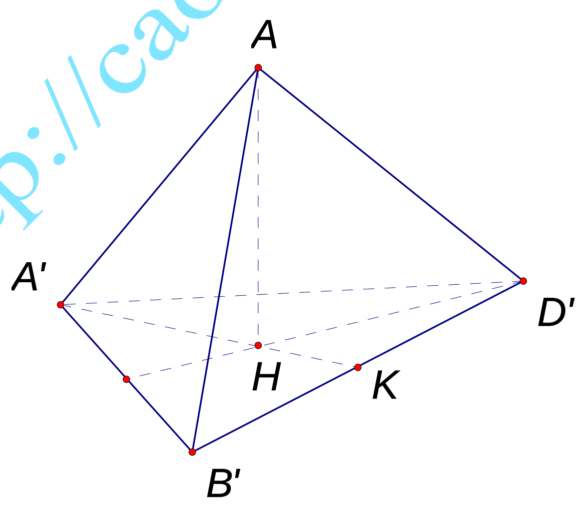
+ Kết hợp (1) và (2) suy ra ba khối tứ diện $AA'B'D'$, $ABB'D$, $ADD'B'$ có thể tích bằng nhau và bằng $1/3$ thể tích của khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$.

• Từ đó suy ra khối tứ diện $AA'B'D'$ có thể tích bằng $1/6$ thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

• Bây giờ chúng ta tính thể tích khối tứ diện $AA'B'D'$ theo *a*.

+ Gọi *H* là trọng tâm của tam giác đều $A'B'D'$ thì *H* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'D'$, *K* là trung điểm cạnh $B'D'$.

Khi đó AH là chiều cao của tứ diện $AA'B'D'$ (t/chất của hình chóp đều).



Ta có $A'H = \frac{2}{3}A'K = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Tam giác AHA' vuông tại H, suy ra

$AH^2 = A'A^2 - A'H^2$

$AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích đáy $A'B'D'$ bằng $S_{A'B'D'} = \frac{1}{2}A'K.B'D' = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối tứ diện $AA'B'D'$ bằng $V_{AA'B'D'} = \frac{1}{3}AH.S_{A'B'D'} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

• Suy ra thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

$$V = 6.V_{AA'B'D'} = 6.\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} \text{ (đvtt)}$$

Cách khác:

Sau khi làm theo cách trên, chúng ta có thể trình bày theo cách khác gọn hơn như sau:

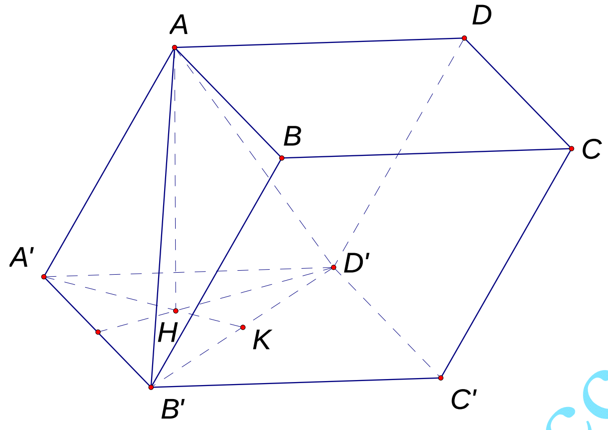
- Tính chiều cao AH của khối tứ diện đều $AA'B'D'$ theo *a*. Đó cũng chính bằng chiều cao của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.
- Đáy $A'B'C'D'$ là tứ giác có diện tích bằng hai lần diện tích tam giác đều $A'B'D'$.
- Suy ra thể tích khối hộp $V = S_{A'B'C'D'}.AH = 2.S_{A'B'D'}.AH$

Các em học sinh tự tính. ***Dễ thấy rằng cách làm thứ hai rất gọn và dễ trình bày*** !

Đỗ Cao Long http://caolong.co.cc

Hình vẽ ở **cách 1** chỉ minh họa để chứng minh tích chất đã nêu. Hình vẽ **tốt** cần chú ý đến giả thiết $AA'B'D'$ là khối tứ diện đều nên phải đảm bảo được tính chất *"Hình chiếu của A phải trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp (trọng tâm) tam giác đều* $A'B'D'$*"*.
- Xem hình vẽ bên.

♣ *Các em hãy lưu ý nhé* !



Câu V:
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$: $3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}=m$. (1)

♣ *Chúng ta sẽ dùng phương pháp hàm số (bảng biến thiên) để giải bài toán.*

• Xem (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $(d): y=m$ với đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)=3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

Ta có $f'(x)=\frac{-3x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}=-3x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}\right)$

• Xét hàm số $g(x)=x^3+2x^2+1$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$, ta có

$g'(x)=3x^2+4x$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

x	$-1/2$		0		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$y=g(x)$	$\frac{11}{8}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $g(x)=x^3+2x^2+1\geq 1, \forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Mặt khác, với $-\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ ta có $3\left(-\frac{1}{2}\right)+4\leq 3x+4\leq 3.1+4\Rightarrow\frac{5}{2}\leq 3x+4\leq 7$

Suy ra $\frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}>0, \forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

Đỗ Cao Long-http://caolong.co.cc

Ngoài ra $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right)$

Từ đó suy ra $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right)$.

Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

x	$-1/2$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$y = f(x)$	$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4
					$y = m$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra đường thẳng $(d): y = m$ (song song với trục *Ox*) cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi $-4 \le m < \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$

• Vậy p/trình đã cho có một nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ khi và chỉ khi

$$-4 \le m < \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$$

Câu VI.a.1
Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $(d): 2x - y - 5 = 0$ và hai điểm $A(1;2)$, $B(4;1)$.
Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc đường thẳng (d) và đi qua hai điểm *A*, *B*.

Cách 1:

• P/trình tham số của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(0;-5)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u} = (1;2)$ là $(d): \begin{cases} x = t \\ y = -5 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

• Gọi I là tâm của đường tròn (C) thỏa ycbt. Vì $I \in (d)$ nên gọi tọa độ của *I* là $I(t;-5+2t), t \in \mathbb{R}$.

• Do (C) qua A, B nên ta có $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$\Leftrightarrow (1-t)^2 + (7-2t)^2 = (4-t)^2 + (6-2t)^2$

$\Leftrightarrow 50 - 30t = 52 - 32t \Leftrightarrow t = 1$

• Vậy đ/tròn (C) cần tìm có tâm $I(1;-3)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{(1-1)^2 + (7-2)^2} = 5$

P/trình đ/tròn (C): $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$

Cách 2:

• Giả sử p/trình của (C) có dạng $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \left(a^2 + b^2 - c > 0\right)$

Tọa độ tâm đ/tròn là $I(-a;-b)$.

Đỗ Cao Long-http://caolong.co.cc

• Đ/tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;2)$, $B(4;1)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases}1^2+2^2+2a.1+2b.2+c=0\\4^2+1^2+2a.4+2b.1+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+4b+c=-5\\8a+2b+c=-17\end{cases}\quad(1)$$

• Mặt khác $I(-a;-b)\in(d)$ nên ta có $2(-a)-(-b)-5=0$

$\Leftrightarrow 2a-b=-5$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases}2a+4b+c=-5\\8a+2b+c=-17\\2a-b=-5\end{cases}$.

Giải hệ ta được $a=-1;b=3;c=-15$.

• Vậy p/trình đ/tròn (C): $x^2+y^2-2x+6y-15=0$

Câu VI.a.2

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;1;2),B(2;0;2)$.

1) Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $MA^2-MB^2=5$

2) Tìm quỹ tích các điểm cách đều hai mặt phẳng (OAB) và (Oxy).

1) Gọi tọa độ $M(x;y;z)$.

Từ giả thiết ta có $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y-0)^2+(z-2)^2$

$\Leftrightarrow -2x-2y-4z+6=-4x-4z+8$

$\Leftrightarrow x+y-1=0$

Vậy quỹ tích các điểm M thoat yêu cầu đề là mặt phẳng có p/trình $x+y-1=0$

2) Gọi $N(x;y;z)$ là điểm cách đều hai mặt phẳng (OAB) và (Oxy).

Ta có $d_{[N,(OAB)]}=d_{[N,(Oxy)]}$ (*)

• Mp(OAB) đi qua điểm $O(0;0;0)$ có vecto pháp tuyến $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(2;2;-2)$.

Suy ra vecto $\vec{n}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(1;1;-1)$ là vecto pháp tuyến của mp(OAB).

P/trình mp(OAB): $1.(x-0)+1(y-0)-1(z-0)=0 \Leftrightarrow x+y-z=0$

• P/trình mp(Oxy): $z=0$

Suy ra $d_{[N,(OAB)]}=\dfrac{|x+y-z|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{|x+y-z|}{\sqrt3}$; $d_{[N,(Oxy)]}=\dfrac{|z|}{\sqrt1}=|z|$

Từ (*) ta có $\dfrac{|x+y-z|}{\sqrt3}=|z|\Leftrightarrow|x+y-z|=\sqrt3|z|$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y-z=\sqrt3z\\x+y-z=-\sqrt3z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y-\left(1+\sqrt3\right)z=0\\x+y+\left(\sqrt3-1\right)z=0\end{array}\right.$$

• Vậy quỹ tích các điểm N thỏa ycbt là các mặt phẳng có phương trình

$x+y-\left(1+\sqrt3\right)z=0$ hoặc $x+y+\left(\sqrt3-1\right)z=0$

Đỗ Cao Long-http://caolong.co.cc

Câu VII.
Với $n \in \mathbb{N}$, hãy chứng minh đẳng thức

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n = (n+2).2^{n-1}$$

Thông thường với bài toán chứng minh các đẳng thức có chứa C_n^k *chúng ta khai triển nhị thức* $(x+a)^n$, *rồi dùng đạo hàm, phép lấy tích phân để suy ra kết quả* !

• Xét khai triển nhị thức sau

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} x^k = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n \qquad (1)$$

{ Để có các hệ số k trước số hạng ta chỉ việc lấy đạo hàm hai vế.
Nhưng nếu lấy đạo hàm đẳng thức trên theo x ta sẽ có

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}$$

Lúc này C_n^0 đã triệt tiêu đồng thời các hệ số trước $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ là 1;2;3 chưa đáp ứng yêu cầu đề.
Vậy chúng ta cần *nâng lũy thừa* của x lên một bậc nữa trước khi lấy đạo hàm bằng cách nhân hai vế đẳng thức trên cho x }

Nhân hai vế đẳng thức trên với x ta được:

$$x(1+x)^n = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + ... + C_n^{n-1} x^n + C_n^n x^{n+1} \qquad (2)$$

• Lấy đạo hàm hàm hai vế đẳng thức (2) theo biến x ta được

$$(1+x)^n + n.x(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + ... + nC_n^{n-1} x^{n-1} + (n+1)C_n^n x^n$$

• Thay $x = 1$ vào đẳng thức trên ta được

$$2^n + n.2^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n$$

$$\Leftrightarrow (2+n)2^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n$$

Vậy ta có $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n = (n+2).2^{n-1}$ (đpcm).

Đỗ Cao Long-http://caolong.co.cc