Câu V:

Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}$ trên khoảng $\left[0;+\infty\right)$

Ta có $f'\left(x\right)=\frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}}{\sqrt{x}.\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}}$

Ta có $x^2+1\geq 1\Rightarrow\left(x^2+1\right)^3\geq x^2+1>x^2$.

Suy ra $\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}>\sqrt[4]{x^2}=\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x}-\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}<0$.

$\Rightarrow f'\left(x\right)<0$ với mọi $x>0$ nên hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

Do đó $f\left(x\right)\leq f\left(0\right)=1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}\right)=0$

Suy ra $0<f\left(x\right)\leq 1$ với mọi $x\in\left[0;+\infty\right)$.

Từ đó suy ra, phương trình $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $0<m\leq 1$.

Các em có thể lập bảng biến thiên để an toàn và khỏi mắc thiếu sót như thế này nhé. Bởi khi lập bảng biên thiên phải tính các giới hạn liên quan mà !

x	0	$+\infty$
$f'\left(x\right)$	$-$	
$f\left(x\right)$	1 ↘	0