GỢI Ý GIẢI ĐỀ 02

Câu I.1:

Học sinh tự giải

Câu I.2:

Tìm *m* để đồ thị (C) hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục O*x* tại một điểm duy nhất.

Cách 1:

• P/trình hoành độ giao điểm của (C) và trục O*x*: $x^3 + mx + 2 = 0$ (*)

• Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn (*) với mọi *m*.

Với $x \neq 0$, ta có $\Leftrightarrow m = \frac{2}{x} - x^2$. (**)

Xét hàm số $f(x) = \frac{2}{x} - x^2$ trên tập $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Ta có $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - 2x = \frac{-2(1+x^3)}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		-3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2}{x} - x^2$ tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi $m > -3$.

Vậy (*) có nghiệm duy nhất với hay đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục O*x* tại một điểm duy nhất với mọi $m > -3$.

Cách 2:

Dùng dạng đồ thị của hàm số bậc ba.

Phương pháp: Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$, có đồ thị (C).

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

• Tr/hợp 1: $f'(x)$ có $\Delta \leq 0$ khi đó hàm số không có cực trị và hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị (C) cắt trục O*x* tại một điểm duy nhất.

• Tr/hợp 2: $f'(x)$ có $\Delta > 0$, tức là hàm số có hai cực trị . Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm phân biệt của p/trình $f'(x) = 0$.

Tr/hợp này đồ thị (C) cắt trục O*x* tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi hai điểm cực trị của (C) luôn cùng nằm về một phía của trục *Ox* $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2) < 0$

Kết hợp hai tr/hợp trên để suy ra giá trị của *m*.

♥ *Nhận xét: Theo cách làm này học sinh thường bỏ sót trường hợp 1 → nên cần chú ý.*

Câu II.1:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=1 & (1) \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 & (2) \end{cases}$ (*)

Cách 1: Xem (2) là p/tr bậc hai theo *x* ta viết lại $y.x^2+2y^2.x+y^3-2=0$.

Có $\Delta'=y^4-y\left(y^3-2\right)=2y$

Nhận xét: Ta có $(2)\Leftrightarrow y\left(x^2+2xy+y^2\right)=2\Leftrightarrow y(x+y)^2=2$.

Đánh giá hai vế suy ra $y>0$. Suy ra $\Delta'=2y>0$.

P/tr (2) có 2 nghiệm $x=\dfrac{-y^2\pm\sqrt{2y}}{y}=-y\pm\sqrt{\dfrac{2}{y}}$.

Ta có $x+y=\pm\sqrt{\dfrac{2}{y}}$.

♣ **Tr/hợp 1**: $x=-y+\sqrt{\dfrac{2}{y}}\Leftrightarrow x+y=\sqrt{\dfrac{2}{y}}$. (3)

Viết (1) dưới dạng $(x+y)\left[\left(x+y^2\right)-3xy\right]=1$. (4)

Thay *y* và $x+y$ ở (3) vào (4) ta được p/tr $\sqrt{\dfrac{2}{y}}\left(\dfrac{2}{y}-3\left(-y+\sqrt{\dfrac{2}{y}}\right).y\right)=1$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\dfrac{2}{y}}\right)^3+3y^2\sqrt{\dfrac{2}{y}}-6=1$ (5)

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{2}{y}}, t>0$. Suy ra $y=\dfrac{2}{t^2}$. P/tr (5) trở thành $t^3+3.\left(\dfrac{2}{t^2}\right)^2.t-7=0$

$\Leftrightarrow t^3+\dfrac{12}{t^3}-7=0\Leftrightarrow t^6-7t^3+12=0$ (6)

Đặt $u=t^3$ ta có p/tr $u^2-7u+12=0$

P/tr này có hai nghiệm $u=4; u=3$.

- Với $u=4$ ta có $t^3=4\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{4}$ .Suy ra $y=\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{16}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Thay vào (3) suy ra $x=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{16}}+\sqrt[3]{4}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{16}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

- Với $u=3$ ta có $t^3=3\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{3}$. Suy ra $y=\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}}$.

Thay vào (3) suy ra $x=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}}+\sqrt[3]{3}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$

Tr/hợp này hệ có hai nghiệm $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}} \end{cases}$

♣ **Tr/hợp 2**: $x=-y-\sqrt{\dfrac{2}{y}} \Leftrightarrow x+y=-\sqrt{\dfrac{2}{y}}$. (7)

Viết (1) dưới dạng $(x+y)\left[\left(x+y^2\right)-3xy\right]=1$. (4)

Thay y và $x+y$ ở (7) vào (4) ta được p/trình $-\sqrt{\dfrac{2}{y}}\left(\dfrac{2}{y}-3\left(-y-\sqrt{\dfrac{2}{y}}\right).y\right)=1$

$\Leftrightarrow -\left(\sqrt{\dfrac{2}{y}}\right)^3-3y^2\sqrt{\dfrac{2}{y}}-6=1$ (8)

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{2}{y}}, t>0$. Suy ra $y=\dfrac{2}{t^2}$. P/tr (8) trở thành $-t^3-3.\left(\dfrac{2}{t^2}\right)^2.t-7=0$

$\Leftrightarrow t^3+\dfrac{12}{t^3}+7=0 \Leftrightarrow t^6+7t^3+12=0$ (9)

Đặt $u=t^3, u>0$ ta có p/tr $u^2+7u+12=0$.
P/tr này có hai nghiệm $u=-4$ và $u=-3$ (loại).
Vậy trường hợp này hệ đã cho vô nghiệm.

Tóm lại, hệ đã cho có hai nghiệm $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}} \end{cases}$

Cách 2:

Dễ thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ nên ta có

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^3+1=\dfrac{1}{y^3} \\ (x+y)^2=\dfrac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^3+1=\dfrac{1}{y^3} & (1) \\ \left(\dfrac{x}{y}+1\right)^2=\dfrac{2}{y^3} & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)^2=2\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^3+1\right]$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y}+1\right)^2-2\left(\dfrac{x}{y}+1\right)\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y}+1\right]=0$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$ ta có phương trình $(t+1)^2-2(t+1)\left(t^2-t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow (t+1)\left[t+1-2\left(t^2-t+1\right)\right]=0 \Leftrightarrow (t+1)\left(-2t^2+3t-1\right)=0$

P/trình này có 3 nghiệm $t=\pm1; t=\dfrac{1}{2}$.

♣ Với $t=1$ ta có $\frac{x}{y}=1 \Leftrightarrow x=y$, thay vào p/tr thứ nhất của hệ ta được

$2x^3=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Suy ra $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

♣ Với $t=-1$ ta có $\frac{x}{y}=-1 \Leftrightarrow x=-y$, thay vào p/trình thứ nhất của hệ ta được

$-y^3+y^3=1$, vô nghiệm.

♣ Với $t=\frac{1}{2}$ ta có $\frac{x}{y}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=2x$, thay vào p/trình thứ nhất của hệ ta được

$x^3+(2x)^3=1 \Leftrightarrow 9x^3=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. Suy ra $y=\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$

Tóm lại hệ đã cho có hai nghiệm $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ y=\frac{2}{\sqrt[3]{9}} \end{cases}$

♥ **<u>Nhận xét</u>**: *Các cách thế khác học sinh tự tìm tòi thêm.*

Câu II.2:

Giải p/trình $2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x \qquad (*)$

Đ/kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hạ bậc $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ để làm xuất hiện góc liên kết $2x-\frac{\pi}{2}$.

Ta có $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}(1-\sin 2x)$

Do đó (*) $\Leftrightarrow 1-\sin 2x=2\sin^2 x-\tan x \Leftrightarrow 1+\tan x-\left(\sin 2x+2\sin^2 x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x+\cos x}{\cos x}-2\sin x(\cos x+\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left(\frac{1}{\cos x}-2\sin x\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ (\sin x+\cos x)(1-2\sin x\cos x)=0 \end{cases}$$

Ta có $(\sin x+\cos x)(1-2\sin x\cos x)=0 \Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1-\sin 2x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=0 \\ 1-\sin 2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-1 \\ \sin 2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+l\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+m\pi \end{array}\right.$$

Hợp các nghiệm trên ta được $x=\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Các nghiệm này thỏa mãn điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$.

Vậy p/trình đã cho có các nghiệm cho bởi công thức $x=\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$.

Câu III: Tính $I=\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$.

Hướng dẫn:

Đặt $x=2\sin t$ với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Ta có $dx=2(\cos t)dt$

Với $x=1$ ta có $t=\frac{\pi}{6}$; với $x=2$ ta có $t=\frac{\pi}{2}$

Khi đó $I=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{2\sin t}.2(\cos t)dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\sqrt{\cos^2 t}.\cos t}{2\sin t}dt$

$$I=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}dt-\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin t dt$$

♣ Ta có $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\sin t}{\sin^2 t}dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\sin t}{1-\cos^2 t}dt$

Đặt $u=\cos t$, $du=-(\sin t)dt$.

Với $t=\frac{\pi}{6}\Rightarrow u=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=0$.

Khi đó $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}dt=\int_{\sqrt{3}/2}^{0}\frac{-du}{1-u^2}=\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{d(u+1)}{u+1}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{d(1-u)}{1-u}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(u+1)-\ln(1-u)\right]\Big|_0^{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}\Big|_0^{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

♣ $\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\sin t)dt=-\cos t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

• Vậy $I=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu IV:
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = h vuông góc mặt phẳng (ABCD), M là điểm thay đổi trên CD. Kẻ SH vuông góc BM. Xác định vị trí M để thể tích tứ diện S.ABH đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhát đó

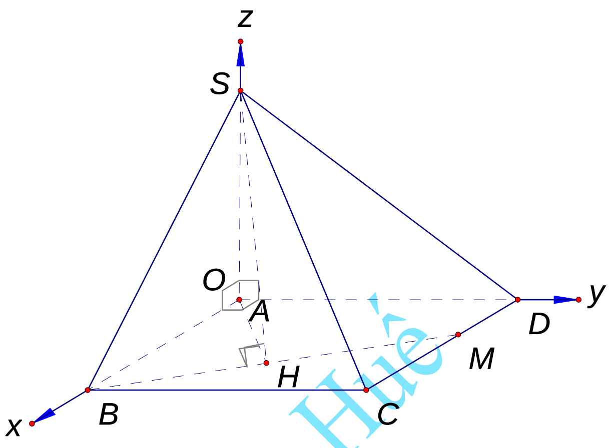
***Cách 1*: Phương pháp tọa độ**

Đặt hình chóp S.ABCD vào hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $A \equiv O, B \in Ox, D \in Oy, S \in Oz$ và tọa độ các điểm như sau:

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$

$D(0;a;0)$, $C(a;a;0)$

$S(0;0;h)$



Gọi tọa độ của $M(m;a;0)$, $m \in \mathbb{R}, 0 \le m \le a$.

Mặt phẳng (SAH) chứa trục Oz , đi qua $A(0;0;0)$.

Ta có $SH \perp BM$ và $BM \perp SA$. Suy ra $BM \perp (SAH)$. Do đó $\overrightarrow{BM} = (m-a;a;0)$ là một vecto pháp tuyến của mp(SAH).

P/trình mp(SAH): $(m-a)(x-0)+a(y-0)=0 \Leftrightarrow (m-a)x+ay=0$.

Đường thẳng *BM* đi qua $B(a;0;0)$ và nhận vecto $\overrightarrow{BM} = (m-a;a;0)$ làm vecto chỉ phương nên có p/trình $\begin{cases} x = a+(m-a)t \\ y = 0+at \\ z = 0+0t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Tọa độ của $H = BM \cap (SAH)$ là nghiệm của hệ p/trình $\begin{cases} (m-a)x+ay=0 & (1) \\ x = a+(m-a)t & (2) \\ y = 0+at & (3) \\ z = 0+0t & (4) \end{cases}$

Thay x, y, z ở (2), (3), (4) vào (1) ta được: $(m-a)\left[a+(m-a)t\right]+a.at=0$

$$\Leftrightarrow \left[(m-a)^2+a^2\right]t = -a(m-a) \Leftrightarrow t = \frac{-a(m-a)}{a^2+(m-a)^2}$$

Thay vào (2), (3), (4) ta được

$$x = a - \frac{a(m-a)^2}{a^2+(m-a)^2} = \frac{a^3}{a^2+(m-a)^2};\ y = \frac{-a^2(m-a)}{a^2+(m-a)^2};\ z=0$$

Vậy tọa độ của *H* là:

$$H\left(\frac{a^3}{a^2+(m-a)^2};\frac{-a^2(m-a)}{a^2+(m-a)^2};0\right).$$

Thể tích khối chóp S.ABH bằng

$$V=\frac{1}{3}SA.S_{ABH}=\frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}BA.BH$$

Vì $SA=h$ không đổi nên V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $HB.HA$ đạt giá trị lớn nhất

Ta có $HB.HA=\sqrt{\left(a-\frac{a^3}{a^2+(m-a)^2}\right)^2+\left(\frac{-a^2(m-a)}{a^2+(m-a)^2}\right)^2+0}$

$$\text{x}\sqrt{\left(\frac{a^3}{a^2+(m-a)^2}\right)^2+\left(\frac{-a^2(m-a)}{a^2+(m-a)^2}\right)^2+0}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a(m-a)^2}{\left\{a^2+(m-a)^2\right\}^2}\right)^2+\left(\frac{-a^2(m-a)}{\left\{a^2+(m-a)^2\right\}^2}\right)^2}\ \text{x}\sqrt{\frac{a^6+a^4(m-a)^2}{\left\{a^2+(m-a)^2\right\}^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2(m-a)^4+a^4(m-a)^2}{\left\{a^2+(m-a)^2\right\}^2}}\ \text{x}\sqrt{\frac{a^4\left(a^2+(m-a)^2\right)}{\left\{a^2+(m-a)^2\right\}^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2(m-a)^2\left\{a^2+(m-a)^2\right\}}{\left\{a^2+(m-a)^2\right\}^2}}\ \text{x}\sqrt{\frac{a^4}{a^2+(m-a)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2(m-a)^2}{a^2+(m-a)^2}.\frac{a^4}{a^2+(m-a)^2}}=\frac{a^3|m-a|}{a^2+(m-a)^2}$$

Đặt $t=m-a$ ta có $-a\le t\le 0$ (vì $0\le m\le a$).

Khi đó $HA.HB=f(t)=\frac{a^3.|t|}{a^2+t^2}=-\frac{a^3t}{a^2+t^2}$.

$$f'(t)=-a^3\frac{a^2-t^2}{\left(a^2+t^2\right)^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow t^2-a^2=0\Leftrightarrow t=-a\ (\text{vì } t\le 0).$$

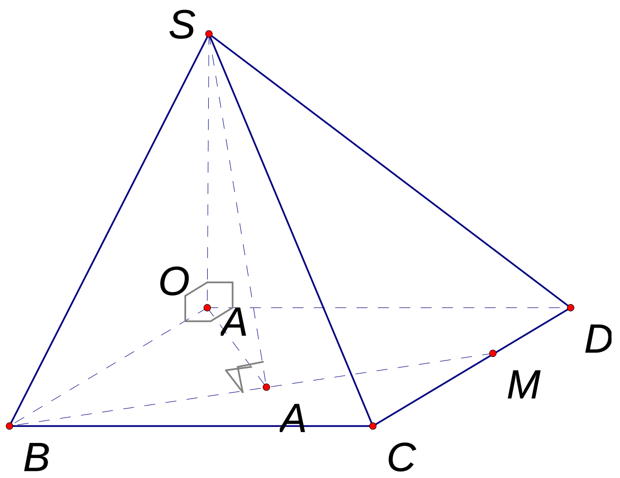
Ta có $f(-a)=-\frac{a^3(-a)}{2a^2}=\frac{a^2}{2}$; $f(0)=0$.

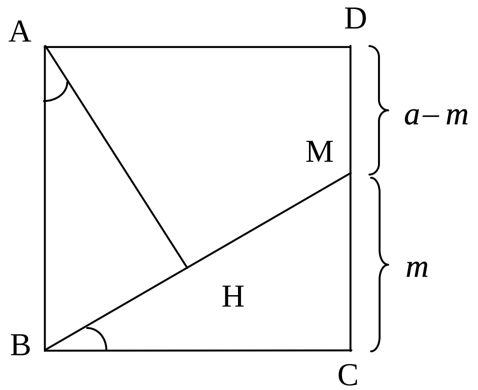
Suy ra giá trị lớn nhất của $f(t)$ bằng $\max\limits_{-a\le t\le 0} f(t)=f(-a)=\frac{a^2}{2}$.

Vậy $HA.HB$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{a^2}{2}$ khi $t=m-a=-a\Leftrightarrow m=0$, hay $M\equiv D$.

Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABH$: $V_{\max}=\frac{1}{6}h.\frac{a^2}{2}=\frac{a^2h}{12}$.

***Cách 2*: Phương pháp hình học**





Đặt $CM = m$, $0 \le m \le a$

Lập luận như cách 1 ta có $BM \perp (SAH) \Rightarrow BM \perp HA$ nên tam giác HAB vuông tại *H*.

Hai tam giác vuông HAB, CBM đồng dạng (vì $\widehat{A} = \widehat{B}$, góc có cạnh t/ứng vuông góc)

Suy ra $\dfrac{HA}{CB} = \dfrac{AB}{BM}$ và $\dfrac{HB}{CM} = \dfrac{AB}{BM}$.

$$\Rightarrow HA = \frac{AB}{BM}.BC = \frac{a}{\sqrt{a^2+m^2}}.a\,;\ HB = \frac{AB}{BM}.CM = \frac{a}{\sqrt{a^2+m^2}}.m$$

Thể tích khối chóp *S.ABH* bằng

$$V = \frac{1}{3}.SA.S_{ABH} = \frac{1}{3}.h.\frac{1}{2}.HA.HB = \frac{1}{6}h.\frac{a^2}{\sqrt{a^2+m^2}}.\frac{a.m}{\sqrt{a^2+m^2}} = \frac{a^3hm}{6\left(a^2+m^2\right)}$$

Xét hàm số $f(m) = \dfrac{a^3hm}{6\left(a^2+m^2\right)}$ với $0 \le m \le a$ ta có

$$f'(m) = \frac{a^3h}{6}.\frac{a^2-m^2}{\left(a^2+m^2\right)^2};\ f'(m) = 0 \Leftrightarrow a^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = a \text{ (vì } 0 \le m \le a\text{)}.$$

Mặt khác $f(0) = 0$; $f(a) = \dfrac{a^4h}{6.2a^2} = \dfrac{a^2h}{12}$ và hàm số f liên tục trên đoạn $[0;a]$. Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\max\limits_{0 \le m \le a} f(m) = f(a) = \dfrac{a^2h}{12}$.

Vậy thể tích khối chóp đạt giá trị lớn nhất bằng $V_{\max} = \dfrac{a^2h}{12}$ khi $m = a$ hay $M \equiv D$.

♥**<u>Nhận xét</u>**: *PP hình học ngắn và gọn hơn. Vì thế đừng ngại dùng nó khi chưa thử.*

Câu V:
Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$

Xét hàm số $y=f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}$ trên khoảng $[0;+\infty)$

Ta có $f'(x)=\frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}{\sqrt{x}.\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}$

Ta có $x^2+1\geq 1\Rightarrow (x^2+1)^3\geq x^2+1>x^2$.

Suy ra $\sqrt[4]{(x^2+1)^3}>\sqrt[4]{x^2}=\sqrt{x}\Rightarrow \sqrt{x}-\sqrt[4]{(x^2+1)^3}<0$.

$\Rightarrow f'(x)<0$ với mọi $x>0$ nên hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $[0;+\infty)$.

Do đó $f(x)\leq f(0)=1$ với mọi $x\in[0;+\infty)$.

Từ đó suy ra, phương trình $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\leq 1$.

Câu VI.a.1
Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng d_1: $x-2y+3=0$, d_2: $4x+3y-5=0$. Lập phương trình đường tròn (C) có tâm I trên d_1, tiếp xúc d_2 và có bán kính $R=2$

Đ/thẳng (d_1) đi qua điểm $A(-3;0)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u_1}=(2;1)$ nên có phương trình tham số $(d_1):\begin{cases}x=-3+2t\\ y=t\end{cases}$.

Vì tâm *I* của đ/tròn (C) thuộc (d_1) nên có tọa độ dạng : $I(-3+2t;t)$

Mặt khác (C) tiếp xúc với (d_2) nên khoảng cách từ *I* đến (d_2) bằng bán kính của (C).

Kết hợp với giả thiết ta có:

$$d_{[I,(d_2)]}=\frac{|4(-3+2t)+3.t-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=R=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|11t-17|}{5}=2\Leftrightarrow |11t-17|=10\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}11t-17=10\\ 11t-17=-10\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=27/11\\ t=7/11\end{array}\right.$$

• Với $t=\frac{27}{11}$ ta có $I\left(\frac{21}{11};\frac{27}{11}\right)$.

P/trình đường tròn (C): $\left(x-\frac{21}{11}\right)^2+\left(y-\frac{27}{11}\right)^2=4$

• Với $t=\frac{7}{11}$ ta có $I\left(-\frac{19}{11};\frac{7}{11}\right)$.

P/trình đường tròn (C): $\left(x+\frac{19}{11}\right)^2+\left(y-\frac{7}{11}\right)^2=4$

♣ Tóm lại có hai đường tròn thỏa yêu cầu bài toán có p/trình:

$$\left(x-\frac{21}{11}\right)^2+\left(y-\frac{27}{11}\right)^2=4 \text{ và } \left(x+\frac{19}{11}\right)^2+\left(y-\frac{7}{11}\right)^2=4.$$

Câu VI.a.2

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng:

$$d_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2},\ d_2:\begin{cases}x=1-2t\\ y=t\\ z=1+t\end{cases}$$ *và mặt phẳng (P): x – y – z = 0.*

Tìm tọa độ hai điểm $M\in d_1$, $N\in d_2$ *sao cho MN song song (P) và* $MN=\sqrt{2}$.

Phương trình tham số của $(d_1):\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=2t\end{cases}$.

Gọi tọa độ của *M*, *N* như sau: $M(m;m;2m)$, $N(1-2n;n;1+n)$, $(m,n\in\mathbb{R})$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(1-2n-m;n-m;1+n-2m)$

$MN^2=(1-2n-m)^2+(n-m)^2+(1+n-2m)^2$

Vecto pháp tuyến của mp(P): $\vec{n}=(1;-1;-1)$.

Vì $MN\parallel(P)$ nên $\overrightarrow{MN}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}.\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow 1-2n-m+(n-m).(-1)+(1+n-2m).(-1)=0$

$\Leftrightarrow -4n+2m=0\Leftrightarrow m=2n\qquad(1)$

Mặt khác $MN=2\Rightarrow MN^2=4$

Nên ta có $(1-2n-m)^2+(n-m)^2+(1+n-2m)^2=4\qquad(2)$

Thay $m=2n$ vào (2) ta được $(1-4n)^2+(-n)^2+(1-3n)^2=4$

$\Leftrightarrow 26n^2-14n-2=0\Leftrightarrow 13n^2-7n-1=0\Leftrightarrow n=\dfrac{7\pm\sqrt{101}}{26}$

•Với $n=\dfrac{7+\sqrt{101}}{26}$ ta có $m=2n=\dfrac{7+\sqrt{101}}{13}$

•Với $n=\dfrac{7-\sqrt{101}}{26}$ ta có $m=2n=\dfrac{7-\sqrt{101}}{13}$

Vậy có hai cặp điểm thỏa yêu cầu bài toán:

$M\left(\dfrac{7+\sqrt{101}}{13};\dfrac{7+\sqrt{101}}{13};\dfrac{14+2\sqrt{101}}{13}\right)$; $N\left(\dfrac{6-2\sqrt{101}}{13};\dfrac{7+\sqrt{101}}{26};\dfrac{33+\sqrt{101}}{26}\right)$

hoặc $M\left(\dfrac{7-\sqrt{101}}{13};\dfrac{7-\sqrt{101}}{13};\dfrac{14-2\sqrt{101}}{13}\right)$; $N\left(\dfrac{6+2\sqrt{101}}{13};\dfrac{7-\sqrt{101}}{26};\dfrac{33-\sqrt{101}}{26}\right)$

Câu VII.a

Tìm số phức z thỏa mãn : $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$

Từ giả thiết ta có $(z+i)^4 = (z-i)^4$ với đ/kiện $z \neq i$.

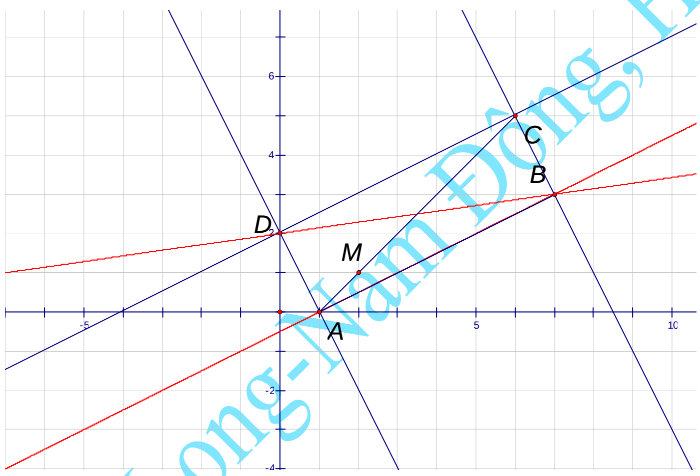
$\Leftrightarrow z^4 + 4z^3i + 6z^2i^2 + 4z.i^3 + i^4 = z^4 + 4z^3(-i) + 6z^2(-i)^2 + 4z.(-i)^3 + (-i)^4$

$\Leftrightarrow 8z^3i - 8z.i = 0 \Leftrightarrow z(z^2-1).i = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=\pm 1 \end{array}\right.$ (thỏa đ/kiện $z \neq i$).

Vậy có ba số phức z thỏa yêu cầu bài toán: $z = 0; z = \pm 1$

Câu VI.b.1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có cạnh $AB: x-2y-1=0$, *đường chéo* $BD: x-7y+14=0$ *và đường chéo AC qua điểm* $M(2;1)$. *Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật*



Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y-1=0 \\ x-7y+14=0 \end{cases}$.

Giải hệ ta được $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$. Vậy $B(7;3)$.

Đường thẳng BC qua $B(7;3)$ và vuông góc với $AB: x-2y-1$ nên nhận vecto pháp tuyến $\vec{n} = (1;-2)$ của AB làm vecto chỉ phương.

P/trình đường thẳng BC: $\begin{cases} x = 7+t \\ y = 3-2t \end{cases}$

P/trình tham số của đường thẳng AB: $\begin{cases} x = 7+2t \\ y = 3+t \end{cases}$

P/trình tham số của đường thẳng BD: $\begin{cases} x = 7+7t \\ y = 3+t \end{cases}$

Gọi tọa độ các điểm A, C, D là:

$A(7+2a;3+a)$, $C(7+c;3-2c)$, $D(7+7d;3+d)$

Theo tính chất của hình chữ nhật và kết hợp giả tiết ta có

$$\begin{cases} AB = CD \\ \overrightarrow{AD} \perp \vec{u}_{AB} \\ \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC} \text{ cùng ph ơng} \end{cases}$$ (trong đó $\vec{u}_{AB} = (2;1)$ là vecto chỉ phương của đ/thẳng AB)

• $AB = CD \Leftrightarrow AB^2 = CD^2$

$\Leftrightarrow (2a)^2 + a^2 = (7d - c)^2 + (d + 2c)^2$

$\Leftrightarrow 5a^2 = 50d^2 + 5c^2 - 10cd$ (1)

• $\overrightarrow{AD} \perp \vec{u}_{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\vec{u}_{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (7d - 2a).2 + (d - a).1 = 0$

$\Leftrightarrow 15d - 5a = 0 \Leftrightarrow a = 3d$ (2)

• $\overrightarrow{MA} = (5 + 2a; 2 + a)$, $\overrightarrow{CA} = (2a - c; a + 2c)$

$\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{CA}$ cùng phương $\Leftrightarrow (5 + 2a)(a + 2c) - (2 + a)(2a - c) = 0$

$\Leftrightarrow 5ac + 12c + a = 0$ (3)

Thay (2) vào (1) ta được $45a^2 = 50d^2 + 5c^2 - 10cd \Leftrightarrow c^2 + d^2 - 2cd = 0$

$\Leftrightarrow (c - d)^2 = 0 \Leftrightarrow c = d$ (4)

Thay (2) và (4) vào (3) ta được $5.3d.d + 12d + 3d = 0 \Leftrightarrow 15d(d + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 0 \\ d = -1 \end{array}\right.$$

• Với $d = 0$ ta có $a = c = 0$, suy ra các điểm A,C,D trùng với B. Bài toán vô nghiệm.

• Với $d = -1$ ta có $c = -1; a = -3$. Trường hợp này ta có tọa độ các đỉnh hình chữ nhật là $A(1;0)$, $B(7;3)$, $C(6;5)$, $D(0;2)$.

<u>Cách khác</u>: Gọi tọa độ của $A(7 + 2a; 3 + a)$.

- Viết p/tr đường thẳng (d_1)_một cạnh của hình chữ nhật_qua A và vuông góc với AB

Giải hệ p/trình $\{d_1; BD\}$ sẽ tìm được tọa độ của đỉnh D (theo ẩn số a).

- Viết p/tr đường thẳng (d_2) qua D và song song với AB,

Giải hệ p/trình $\{d_2; BC\}$ sẽ tìm được tọa độ của đỉnh C (theo ẩn số a).

- Biết đ/chéo AC qua M nên $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}$ cùng phương.

Giải đ/kiện cùng phương của hai vecto này để tìm a. Suy ra tọa độ các đỉnh A,C,D.

♥ **<u>Nhận xét</u>**:

Ở cách làm trên (cách 1) việc chọn điểm đi qua là $B(7;3)$ để viết p/trình tham số của các đường thẳng AB, BD, BC là rất thuận lợi khi tính toán (để khi trừ tọa độ cho nhau sẽ được kết quả rất gọn $\rightarrow$ kinh nghiệm)

Câu VI.b.2

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm O(0 ; 0 ; 0), A(0 ; 0 ; 4), B(2 ; 0 ; 0) và mặt phẳng (P): 2x + 2y – z + 5 = 0. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm O, A, B và có khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{5}{3}$

Khoảng cách từ tâm I đến mp(P) bằng bán kính R của mặt cầu. Theo giả thiết ta có $R = \frac{5}{3}$

Mặt khác mặt cầu (S) đi qua 3 điểm O, A, B nên ta có $IO = IA = IB = R = \dfrac{5}{3}$.

Từ đó ta có $\begin{cases} IO^2 = \dfrac{25}{9} \\ IA^2 = \dfrac{25}{9} \\ IB^2 = \dfrac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9IO^2 = 25 \\ 9IA^2 = 25 \\ 9IB^2 = 25 \end{cases}$.

Gọi tọa độ của tâm là $I(a;b;c)$, ta có hệ

$$\begin{cases} 9\left(a^2+b^2+c^2\right)=25 \\ 9\left(a^2+b^2+(c-4)^2\right)=25 \\ 9\left((a-2)^2+b^2+c^2\right)=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\left(a^2+b^2+c^2\right)=25 \\ 9(-8c+16)=0 \\ 9(-4a+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=2 \\ 9\left(b^2+5\right)=25 \end{cases} \Rightarrow b \in \varnothing$$

Vậy bài toán vô nghiệm.

Nhận xét:

- Bài toán dư giả thiết khi cho p/trình mp(P).
- Thay giả thiết $R = 5$ (hoặc số khác) khi đó ta có $b^2 + 5 = 25 \Leftrightarrow b^2 = 20 \Leftrightarrow b = \pm 2\sqrt{5}$

Bài toán có hai nghiệm (hai mặt cầu thỏa mãn):

Câu VII.b

Điều kiện $\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ \dfrac{x}{3} > 0, \dfrac{x}{3} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0, x \neq 1, x \neq 3$.

Khi đó $\log_x 3 < \log_{x/3} 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_3 x} - \dfrac{1}{\log_3 x/3} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\log_3 \dfrac{x}{3} - \log_3 x}{\log_3 x . \log_3 \dfrac{x}{3}} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3 \frac{1}{3}}{\log_3 x . \log_3 \frac{x}{3}} < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\log_3 x . \log_3 \frac{x}{3}} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x . \log_3 \frac{x}{3}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3 \dfrac{x}{3} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 \dfrac{x}{3} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x/3 > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x/3 < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện ta có $\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0;1) \cup (3;+\infty)$