GỢI Ý GIẢI ĐỀ SỐ 01

Câu I .1: Học sinh tự giải

Câu I .2: Đường thẳng qua $M\left(0;-1\right)$ với hệ số góc *k* có p/trình $\left(d\right): y-\left(-1\right)=k\left(x-0\right)$

Hay $\left(d\right): y=kx-1$.

P/tr hoành độ giáo điểm của (d) và (C): $2x^3-3x^2-1=kx-1$ (1)

$\Leftrightarrow x\left(2x^2-3x-k\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2-3x-k=0\ (2) \end{array}\right.$

Đ/k cần và đủ để (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt là (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ P/tr bậc hai (2) có hai nghiệm phân biệt khác không $\Leftrightarrow \begin{cases} 2.0-3.0-k\neq 0 \\ \Delta=9+8k>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ k>-9/8 \end{cases}$.

Vậy các giá trị của *k* phải tìm: $k\in\left(-9/8;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$.

Câu II.1: Giải p/tr $\sin^3 x+\cos^3 x=\cos 2x\left(2\cos x-\sin x\right)$ (1)

Nhận xét: $\sin^3 x+\cos^3 x=\left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\sin x\cos x\right)$

Còn $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos x-\sin x\right)$

Vậy hai số hạng hai vế có thừ số chúng là $\cos x+\sin x$.

<u>Giải</u>:

(1) $\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\sin x\cos x\right)=\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos x-\sin x\right)\left(2\cos x-\sin x\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left[1-\sin x\cos x-\left(\cos x-\sin x\right)\left(2\cos x-\sin x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left[1-4\sin x\cos x-\left(2\cos^2 x+\sin^2 x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(1-4\sin x\cos x-\left(1+\cos^2 x\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\sin x+\cos x\right)\left(4\sin x+\cos x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \sin x+\cos x=0 \\ 4\sin x+\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \tan x=-1 \\ \tan x=-1/4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi/2+k\pi \\ x=-\pi/4+l\pi \\ x=-\arctan\left(1/4\right)+m\pi \end{array}\right. \quad \left(k,l,m\in\mathbb{Z}\right).$$

Kết luận: P/tr có các nghiệm ………

Câu II.2. Giải bpt $\dfrac{3}{\log_2\left(x+1\right)}>\dfrac{2}{\log_3\left(x+1\right)}$ (2)

Đ/k: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \end{cases}$

Khi đó $\left(2\right)\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x\neq 0 \\ 3\log_{x+1}2>2\log_{x+1}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x\neq 0 \\ \log_{x+1}8>\log_{x+1}9 \end{cases}$

Vì $8<9$ nên $\log_{x+1}8>\log_{x+1}9 \Leftrightarrow 0<x+1<1 \Leftrightarrow -1<x<0$

Vậy tập nghiệm của (2) là : $T=\left(-1;0\right)$

Câu III:

P/tr hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $-x^2-2x-2=|2x+2|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -1\\ -x^2-2x+2=2x+2\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\ -x^2-2x+2=-2x-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -1\\ x^2+4x=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\ x^2-4=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -1\\ x=0;x=-4\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\ x=\pm 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm bằng:

$$S=\int_{-2}^{0}\left||2x+2|-\left(-x^2-2x+2\right)\right|dx$$

$$S=\int_{-2}^{-1}\left||2x+2|+x^2+2x-2\right|dx+\int_{-1}^{0}\left||2x+2|+x^2+2x-2\right|dx$$

$$S=\left|\int_{-2}^{-1}\left[-(2x+2)+x^2+2x-2\right]dx\right|+\left|\int_{-1}^{0}\left[(2x+2)+x^2+2x-2\right]dx\right|$$

$$S=\left|\int_{-2}^{-1}\left(x^2-4\right)dx\right|+\left|\int_{-1}^{0}\left(x^2+4x\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_{-2}^{-1}\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_{-1}^{0}\right|$$

$$S=\left|-\frac{5}{3}\right|+\left|-\frac{5}{3}\right|=\frac{10}{3}$$

Câu IV, **V** (Xem đề thi PHE lần 1)

Câu VI.a.1:

Cách 1:

Phương trình tham số của đ/thẳng $(d):\begin{cases}x=2t\\ y=-1+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$.

Gọi tọa độ của $M\in(d)$ là $M(2m;m-1)$, $(m\in\mathbb{R})$.

Ta có $2MA^2+MB^2=2\left[(2m-0)^2+(m-1-1)^2\right]+\left[(2m-3)^2+(m-1-4)^2\right]$

$=15m^2-30m+42=15(m-1)^2+27\ge 27$. Suy ra $2MA^2+MB^2\ge 27,\forall m\in\mathbb{R}$.

$2MA^2+MB^2=27\Leftrightarrow m-1=0\Leftrightarrow m=1$.

Vậy với M có tọa độ $M(2;0)$ thì $2MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 27.

Cách 2:

Với điểm I tùy ý ta có $2MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=3\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$. Xét điểm I sao cho

$2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IB}=-2\overrightarrow{IA}$,

ta có tọa độ của I là: $I\begin{cases}x_I=\dfrac{x_B+2x_A}{1+2}=\dfrac{3+2.0}{3}=1\\ y_I=\dfrac{y_B+2y_A}{1+2}=\dfrac{4+2.1}{3}=2\end{cases}$. Hay $I(1;2)$ cố định.

Với điểm $I\left(1;2\right)$ ta có $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ nên $2MA^2+MB^2=3MI^2+2IA^2+IB^2$.

Do IA^2, IB^2 không đổi nên $2MA^2+MB^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI^2 nhỏ nhất.

Mà $M\in\left(d\right)$ nên MI^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ *M* là hình chiếu vuông góc của *I* trên $\left(d\right)$.

Xét đường thẳng $\left(d'\right)$ qua $I\left(1;2\right)$ và vuông góc với $\left(d\right)$. Vecto pháp tuyến của $\left(d'\right)$ là vecto chỉ phương của $\left(d\right)$, là vecto $\vec{n}=\left(2;1\right)$.

PTTQ của $\left(d'\right)$: $2\left(x-1\right)+1\left(y-2\right)=0\Leftrightarrow 2x+y-4=0$.

Hình chiếu *M* vuông góc của *I* trên $\left(d\right)$ là giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(d'\right)$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y-2=0\\2x+y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$.

Vậy $M\left(2;0\right)$.

Câu VI.a.2 (Xem đáp án đề PHE lần 1)

Câu VII.a:

Với $x>0$, ta có $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}+\sqrt[4]{x^3}\right)^{17}=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^k\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)^{17-k}\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^k=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^k.x^{\frac{2\left(k-17\right)}{2}}.x^{\frac{3k}{4}}$

$=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^k x^{\frac{7k-68}{4}}\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Số hạng không chứa *x* ứng với giá trị của *k* thỏa mãn $\frac{7k-68}{4}=0\Leftrightarrow k=\frac{68}{7}\notin\mathbb{Z}$ (loại).

Với $x>0$, ta có

$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}+\sqrt[4]{x^3}\right)^{17}=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^k\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)^{17-k}\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^k=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^k.\left(-x\right)^{\frac{2\left(k-17\right)}{2}}.x^{\frac{3k}{4}}$

$=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^k\left(-1\right)^{k-17}x^{\frac{7k-68}{4}}\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Số hạng không chứa *x* ứng với giá trị của *k* thỏa mãn $\frac{7k-68}{4}=0\Leftrightarrow k=\frac{68}{7}\notin\mathbb{Z}$ (loại).

Tóm lại không có số hạng cần tìm.

Câu VI.b.1 (Xem đáp án đề PHE lần 1)

Câu VI.b.2:

Phương trình tham số của $\left(\Delta\right):\begin{cases}x=t\\y=-3-t\\z=2t\end{cases},\left(t\in\mathbb{R}\right)$

Tâm *I* của mặt cầu thuộc $\left(\Delta\right)$, gọi tọa độ $I\left(t;-3-t;2t\right)$, $\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Vì mặt cầu (S) bán kính *R* tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên ta có

$$d_{\left[I,(P)\right]}=d_{\left[I,(Q)\right]}=R\Leftrightarrow\frac{\left|2.t-\left(-3-t\right)-2.2t+3\right|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2+\left(-2\right)^2}}=\frac{\left|2.t-6\left(-3-t\right)+3.2t-4\right|}{\sqrt{2^2+\left(-6\right)^2+3^2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|6-t\right|}{3}=\frac{\left|14t+14\right|}{7}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\left(14t+14\right)=7\left(6-t\right)\\3\left(14t+14\right)=-7\left(6-t\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=12/5\end{array}\right.$$

Với $t=0$ ta có $I\left(0;-3;0\right)$, $R=\dfrac{\left|6-0\right|}{3}=2$.

Với $t=\dfrac{12}{5}$ ta có $I\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{27}{5};\dfrac{24}{5}\right)$, $R=\dfrac{\left|6-{}^{12}\!/\!_{5}\right|}{2}=\dfrac{9}{5}$.

Vậy có hai mặt cầu thỏa ycbt có p/trình:

$x^2+\left(y+3\right)^2+z^2=4$;

$\left(x-\dfrac{12}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{27}{5}\right)^2+\left(z-\dfrac{24}{5}\right)^2=\dfrac{81}{25}$.

Câu VII.b:

• Gọi $a+bi$ $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ là một căn bậc hai của $z=-1+4\sqrt{3}i$, ta có:

$\left(a+bi\right)^2=-1+4\sqrt{3}i\Leftrightarrow a^2-b^2+2ab.i=-1+4\sqrt{3}.i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=-1\\2ab=4\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2+1=0\\b=\dfrac{2\sqrt{3}}{a}\end{cases}$

Từ hệ ta có $a^2-\dfrac{12}{a^2}+1=0\Leftrightarrow a^4+a^2-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2=-4\\a^2=3\end{array}\right.$

Vì $a\in\mathbb{R}$ nên $a^2=-4$ loại. Vậy $a^2=3\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{3}$.

Cặp giá trị $\left(a;b\right)$ cần tìm là $\begin{cases}a=\sqrt{3}\\b=2\end{cases}$ và $\begin{cases}a=-\sqrt{3}\\b=-2\end{cases}$.

Hai căn bậc hai của $z=-1+4\sqrt{3}i$ là: $\sqrt{3}+2i$ và $-\left(\sqrt{3}+2i\right)$.

- - - Hết - - -